

SVÖR OG LAUSNIR - 8. BEKKUR

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 20 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1. Anna heldur höndum sínum fyrir aftan bak og er með ákveðinn fjölda af fingrum uppi. Hve marga fingur er Anna mögulega með uppi fyrir aftan bak ef við vitum að
- (a) Fjöldinn er ekki framtala
 - (b) Kvaðratrótin af fjöldanum er ekki heil tala
 - (c) Þriðja rótin (teningsrótin) af fjöldanum er ekki heil tala.

0

1

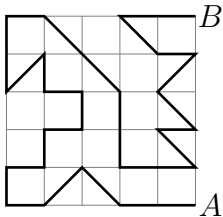
6

8

Svar: 6

Lausn: Engin af tölunum eru framtölur. Við höfum að $\sqrt{0} = 0$ og $\sqrt{1} = 1$ sem eru heilar tölur og $\sqrt[3]{8} = 2$ sem er heil. Svo eina talan sem kemur til greina er 6.

2. Bréfberi þarf að fara frá punktinum A að punktinum B og velur að fara leiðina sem sýnd er á myndinni. Hve löng er leiðin ef hver rúða er með hliðarlengd 1?



$20 + 10\sqrt{2}$

$21 + 9\sqrt{2}$

$22 + 8\sqrt{2}$

30

Svar: $21 + 9\sqrt{2}$

Lausn: Strikin sem halla eru hvert um sig með lengdina $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ skv. reglu Pýþagórasar. Skástrikin eru samtals 9 og einingarstrikin eru samtals 21. Svo vegalengdin er $21 + 9\sqrt{2}$.

3. Hvað er $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 25 + 27 + 29$?

100 210 225 290

Svar: 225

Lausn: Þetta má t.d. reikna með því að rita summuna af öllum tölunum, nema 15, á ákveðinn hátt:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ +29 & +27 & +25 & +23 & +21 & +19 & +17 \\ \hline 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{array}$$

og þá fáum við summuna $7 \cdot 30 + 15 = 210 + 15 = 225$.

4. Hliðarlengdir kassa eru allar 5. Hvert verður rúmmál kassans ef breidd hans er minnkuð um 1, lengd hans minnkuð um 2 en hæð hans aukin um 3?

96 100 121 125

Svar: 96

Lausn: Við fáum að rúmmálið verður: $(5 - 1) \cdot (5 - 2) \cdot (5 + 3) = 4 \cdot 3 \cdot 8 = 4 \cdot 24 = 96$.

5. Hvaða tala er minnst?

2^{32} 4^{16} 8^8 16^4

Svar: 16^4

Lausn: Athugum að

$$4^{16} = (2^2)^{16} = 2^{2 \cdot 16} = 2^{32}, \quad 8^8 = (2^3)^8 = 2^{3 \cdot 8} = 2^{24} \quad \text{og} \quad 16^4 = (2^4)^4 = 2^{4 \cdot 4} = 2^{16}$$

og þá sést að tölurnar eru allar 2 í einhverju veldi og síðasta veldið er lægst og því er 16^4 minnsta talan.

6. Látum f_m, f_n og f_u tákna fjölda bókstafanna m, n og u í orðinu „nunnununnunum“. Hvaða tala er $f_m + f_n + f_u - f_m \cdot f_n \cdot f_u$?

0

-18

-38

-47

Svar: -47

Lausn: Við sjáum að

$$f_m + f_n + f_u - f_m \cdot f_n \cdot f_u = 2 + 6 + 5 - 2 \cdot 6 \cdot 5 = 13 - 60 = -47.$$

7. Stærðin $\frac{4}{10000} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{1}{10}$ er jöfn

4321

1234

0,4321

0,1234

Svar: 0,1234

Lausn: Við fáum að $\frac{4}{10000} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{1}{10} = 0,0004 + 0,003 + 0,02 + 0,1 = 0,1234$.

8. Stærðin $\frac{1/3 + 1/4}{5/6}$ er jöfn

1/3

7/10

5/6

1

Svar: $\frac{7}{10}$

Lausn: Við lengjum brotabrotið með minnsta samnefnara smábrotanna, sem er 12, og fáum

$$\frac{1/3 + 1/4}{5/6} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 12}{\frac{5}{6} \cdot 12} = \frac{4 + 3}{10} = \frac{7}{10}.$$

9. Línuritið sýnir hitastig í gráðum yfir einn sólarhring. Í hve margar klukkustundir er hitinn 5 gráður eða minna á þessum sólarhring?



6 klst.

7 klst.

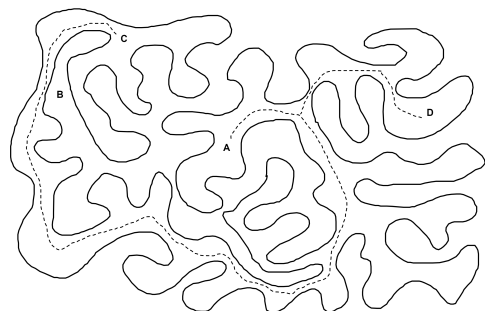
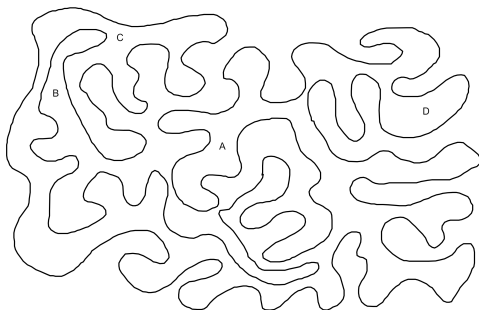
8 klst.

9 klst.

Svar: 7 klst.

Lausn: Hitinn er 5°C eða minna á tímabilunum [0;1], [5;8], [11;5;13;5] og [23;24]. Lengd bilanna er því $1 + 3 + 2 + 1 = 7$ svo hitinn er 5°C eða minna í 7 klst.

10. Myndin sýnir völungarhús sem inniheldur bókstafina A, B, C og D. Hver af eftirfarandi tengingum er ekki möguleg?



A til C

C til D

A til B

D til A

Svar: A til B

Lausn: Myndin hægra megin að ofan sýnir hvernig leiðirnar A, C og D tengjast og því auðvelt að sjá hvert svarið er.

11. Guðmundur er með tíu blöð. Sum þeirra eru rétthyrningslaga og önnur þríhyrningslaga. Hann klippir þrjú af rétthyrningslaga blöðunum þannig að hvert um sig myndar tvo þríhyrninga. Hann telur síðan öll hornin á blöðunum 13 og fær útkomuna 42. Hve marga þríhyrninga var Guðmundur með áður en hann klippti rétthyrningana?

4

5

6

7

Svar: 4

Lausn: Hér væri hægt að stilla upp nokkrum jöfnum en ein leiðin er einfaldlega að prófa sig áfram með svarmöguleikana sem gefnir eru:

4 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $4+2\cdot 3=10$ og rétthyrningarnir 3. Horn: $3\cdot 10+3\cdot 4=42$.

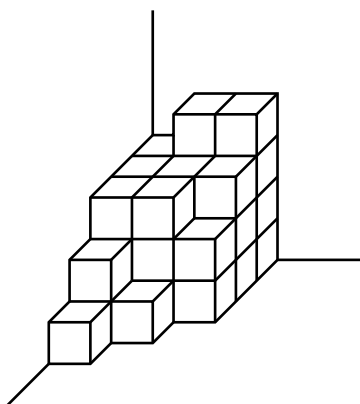
5 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $5+2\cdot 3=11$ og rétthyrningarnir 2. Horn: $3\cdot 11+2\cdot 4=41$.

6 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $6+2\cdot 3=12$ og rétthyrningarnir 1. Horn: $3\cdot 12+1\cdot 4=40$.

7 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $7+2\cdot 3=13$ og rétthyrningarnir 0. Horn: $3\cdot 13+0\cdot 4=39$.

Svo Guðmundur var með 4 þríhyrninga í upphafi.

12. Þó nokkrum eins teningslaga kubbum er staflað reglulega í horn. Í hve marga af kubbum sést ekkert í?



12

13

19

32

Svar: 13

Lausn: Sjáum fyrst fyrir okkur hve margir kubbar eru á hverri hæð og í hve marga sést.

Á 1. hæð eru 12 kubbar og það sést í 5 þeirra. Því eru $12-5=7$ kubbar sem ekki sést í.

Á 2. hæð eru 10 kubbar og það sést í 5 þeirra. Því eru $10-5=5$ kubbar sem ekki sést í.

Á 3. hæð eru 8 kubbar og það sést í 7 þeirra. Því eru $8-7=1$ kubbar sem ekki sést í.

Á 4. hæð eru 2 kubbar og það sést í þá báða. Því eru 0 kubbar sem ekki sést í.

Alls sést því í $7+5+1+0=13$ kubba.

13. Hversu oft er miðnætti frá og með klukkan 13.00 þann 27. desember til og með 18. janúar klukkan 13.00 árið eftir?

21 sinni

22 sinnum

23 sinnum

24 sinnum

Svar: 22

Lausn: Frá 27. desember til 1. janúar árið eftir kemur miðnætti 5 sinnum fyrir því það er 31 dagur í desember. Frá 1. janúar til 18. janúar kemur miðnætti 17 sinnum fyrir. Alls kemur því miðnætti fyrir $5 + 17 = 22$ sinnum.

14. Halldóra kaupir bland í poka á nammibar og velur sér 100 nammimola. Halldóra vill að nammipokinn endist nákvæmlega í fimm daga en á hverjum degi fær hún sér 6 fleiri mola en daginn á undan. Hversu marga mola á hún að borða fyrsta daginn?

2

5

8

14

Svar: 8

Lausn: Látum x vera fjölda namma sem Halldóra á að borða fyrsta daginn. Þá fáum við:

$$\begin{aligned}x + (x + 6) + (x + 6 + 6) + (x + 6 + 6 + 6) + (x + 6 + 6 + 6 + 6) &= 100 \Leftrightarrow 5x + 10 \cdot 6 = 100 \\&\Leftrightarrow 5x + 60 = 100 \\&\Leftrightarrow 5x = 100 - 60 \\&\Leftrightarrow 5x = 40 \\&\Leftrightarrow x = 8\end{aligned}$$

svo Halldóra á að fá sér 8 nammimola fyrsta daginn.

15. Hversu oft sker ferillinn á myndinni sjálfan sig?



33 sinnum

34 sinnum

35 sinnum

36 sinnum

Svar: 34 sinnum

Lausn: Myndin hægra megin að ofan sýnir litla hringi á öllum stöðunum þar sem ferillinn sker sjálfan sig. Með því að telja hringina er nokkuð auðvelt að sjá hvert svarið er.

16. Finnið tákn númer 2025 í óendanlega langa strengnum (punktarnir þrír í lokin tákna að mynstrið heldur endalaust áfram)

#&=!%#&=!%#&=!%#&=!%#&=!%...

!

#

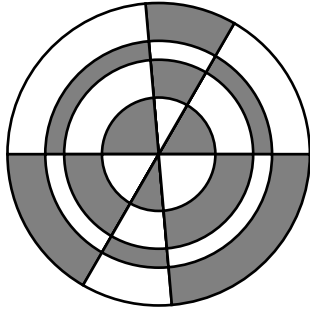
&

%

Svar: %

Lausn: Í óendanlega strengnum kemur hlutstrengurinn #&=!% fyrir aftur og aftur en í honum eru 5 tákn. Þar eð 5 gengur upp í 2025 er tákn nr. 2025 síðasta táknið í hlutstrengnum sem er %.

17. Allir hringirnir fjórir hafa sömu miðju. Geislar þeirra eru $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, 3 og 4. Allir strengirnir ganga í gegnum miðju hringins. Hvert er samanlagt flatarmál skyggðu svæðanna?

 8π 16π $\frac{37\pi}{4}$

Ónógar upplýsingar

Svar: 8π

Lausn: Við tökum eftir því að ef við víxlum á gráum svæðum í einum hringeira í efri hálfhringnum við hvítu svæðin í hringgeiranum beint á móti þá verður efri geirinn alveg óskyggður en sá neðri alveg skyggður. Gerum þetta við öll efri skyggðu svæðin og fáum þá óskyggðan efri hálfhring og skyggðan neðri hálfhring. Þá má auðveldlega sjá að flatarmálið er helmingur flatarmáls hringa með geisla 4 og er þá

$$\frac{4^2\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

18. Eftir að innritun lauk í framhaldsskólana vorið 2024 fengu 224 nemendur skólavist á náttúrufræðibraut í MR. Af þessum 224 nemendum tóku 67 þátt í stærðfræðikeppni grunnskólanema í MR um veturinn í 10. bekk. Hvað eru það um það bil mörg prósent nýnemanna?

U.þ.b. 10%

U.þ.b. 25%

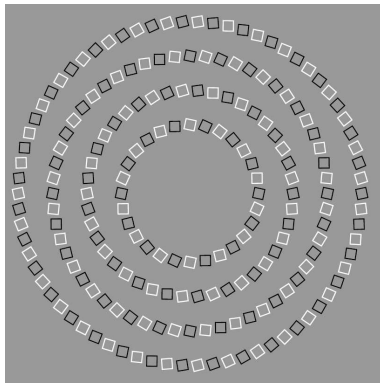
U.þ.b. 30%

U.þ.b. 50%

Svar: U.þ.b. 30%

Lausn: Þetta er hægt að leysa á ýmsa vegu með því að námunda tölurnar. T.d. má sjá að $0,3 \cdot 224 = 67,2 \approx 67$ og því er svarið u.þ.b. 30%.

19. Hver er minnsti fjöldi hringja sem bæta þarf inn á myndina til að allir litlu ferhyrningarnir fari um hring?



3

4

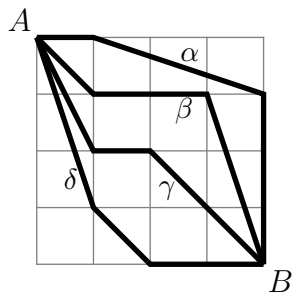
5

120

Svar: 4

Lausn: Hér til hliðar má sjá myndina þegar búið er að bæta 4 hringjum inn á hana (Það er auðveldara að sjá hringina fyrir sér á vinstri myninni með því að halda henni langt frá sér).

20. Áróra hefur úr fjórum leiðum að velja til að komast frá A til B . Hvaða leið er lengst?

 α β γ δ

Svar: α

Lausn: Við fáum með reglu Pýþagórasar að

$$\text{Lengd } \alpha = 1 + \sqrt{3^2 + 1^2} + 3 = 4 + \sqrt{10},$$

$$\text{Lengd } \beta = \sqrt{1^2 + 1^2} + 2 + \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{10} < 2 + 2 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10} = \text{Lengd } \alpha,$$

$$\text{Lengd } \gamma = \sqrt{1^2 + 2^2} + 1 + \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{8} < 3 + 1 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10} = \text{Lengd } \alpha \text{ og}$$

$$\text{Lengd } \delta = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} + 2 = \sqrt{10} + \sqrt{2} + 2 = \text{Lengd } \beta < \text{Lengd } \alpha.$$

Svo leiðin merkt α er lengsta leiðin.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 5 spurningar. Hver spurning er 6 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

21. Í tölvuleik fær spilari 4 stig fyrir að ná í jarðarber, 7 stig fyrir að ná í gullpening og 12 stig fyrir að ná í demant. Georg spilar tölvuleikinn og fær: jarðarber, jarðarber, demant, gullpening, gullpening, gullpening, gullpening, jarðarber, demant. Hvað fær Georg mörg stig?

Svar: 64

Lausn: Þar eð Georg fær þrjú jarðarber, fjóra gullpeninga og tvo demanta fær hann alls

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 12 = 12 + 28 + 24 = 64 \text{ stig.}$$

22. Leysið jöfnuna: $4x - 12 = 3 - (5 - 2x)$.

Svar: $x = 5$

Lausn: Fáum að $x = 5$ þar eð

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 3 - (5 - 2x) \\ \Leftrightarrow 4x - 12 &= 3 - 5 + 2x \\ \Leftrightarrow 4x - 2x &= 12 + 3 - 5 \\ \Leftrightarrow 2x &= 10 \\ \Leftrightarrow x &= 5. \end{aligned}$$

23. Viðar og Fura fá happdrættismiða til að selja og eru miðarnir 200 talsins og tölusettir frá 1 til 200. Viðar selur miða 88-112 og Fura selur miða 150-200. Hve marga miða selja þau alls?

Svar: 76

Lausn: Þau selja alls:

$$(112 - 88 + 1) + (200 - 150 + 1) = 25 + 51 = 76 \text{ miða.}$$

Athugið að bæta þarf einum við eftir hvorn frádrátt því miðar með hæsta og lægsta númeri eru seldir í báðum tilvikum.

24. Sjö piltar og ein stúlka frá skóla einum taka þátt í stærðfræðikeppni. Meðalstigafjöldi strákanna var 58 stig. Hvað var stúlkan með mörg stig ef meðalstigafjöldi allra átta krakkanna var 60?

Svar: 74 stig

Lausn: Þetta er hægt að leysa á ýmsa vegu, t.d. á eftirfarandi hátt.

Látum x vera stigafjölda stúlkunnar. Þá fáum við

$$\begin{aligned}\frac{7 \cdot 58 + x}{8} &= 60 \Leftrightarrow 7 \cdot (60 - 2) + x = 8 \cdot 60 \\ &\Leftrightarrow 7 \cdot 60 - 7 \cdot 2 + x = 8 \cdot 60 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \cdot 60 - 7 \cdot 60 + 14 \\ &\Leftrightarrow x = 60 + 14 \\ &\Leftrightarrow x = 74.\end{aligned}$$

Svo stúlkan fékk 74 stig í stærðfræðikeppninni.

-
25. Rauð geimvera lendir á jörðinni. Hún snertir þrjá jarðarbúa sem sýkjast og verða allir rauðir. Geimveran deyr síðan samstundis. Næsta dag snertir sérhver hinna rauðu jarðarbúa þrjá ósýkta jarðabúa sem allir sýkjast og verða líka rauðir. Allir hinna sýktu eru einungis snertir af einum sýktum jarðarbúa. Sýktu jarðarbúarnir þrír deyja svo samstundis. Sérhver hinna nýju sýktu jarðarbúa snertir þrjá ólíka ósýkta jarðabúa daginn eftir og þannig heldur ferlið áfram. Hve margir jarðarbúar sýkjast á 4. deginum?

Svar: 81

Lausn: Fjöldi sýktra einstaklinga þrefaldast alltaf frá deginum á undan. Fjöldinn verður því $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$.

Þriðji hluti

Í þessum hluta er eitt dæmi sem er 10 stiga virði. Sýna skal aðferðina sem er notuð til þess að leysa dæmið. Við mat á lausn er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu lausnaraðferðar.

26. Þriggja stafa tala á forminu $2A4$ er lögð við töluna 329 og útkoman er þriggja stafa tala á forminu $5B3$. Ef svarið, $5B3$, er deilanlegt með þremur hver er stærsta mögulega talan sem A getur verið?

Svar: 4

Lausn: Setjum dæmið upp:

$$\begin{array}{r} 2 \ A \ 4 \\ + \ 3 \ 2 \ 9 \\ \hline 5 \ B \ 3 \end{array}$$

Við leggjum saman öftustu tölurnar of fáum 13, svo 1 er geymdur með tugasetunum. Þá fæst að $A+2+1=B$ og þá er $A+3=B$.

A getur ekki verið 7, 8 eða 9 því þá verður $B \geq 10$ og færi þá 1 í hundraðssætið sem gengur ekki því $2+3=5$ þegar hundraðssætið er skoðað. Þar sem svarið $5B3$ er deilanlegt með þremur getur B einungis tekið gildin 1,4 eða 7 því þá er þversumma $5B3$, þ.e. $5+B+3$ deilanleg með þremur og talan sjálf þá deilanleg með þremur. Við sjáum að $B=7$ gefur stærstu mögulega gildið á A , þannig að $A=4$.
