

SVÖR OG LAUSNIR - 10. BEKKUR

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 10 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1. Hvað er $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 25 + 27 + 29$?

100

210

225

290

Svar: 225

Lausn: Þetta má t.d. reikna með því að rita summuna af öllum tölunum, nema 15, á ákveðinn hátt:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ +29 & +27 & +25 & +23 & +21 & +19 & +17 \\ \hline 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{array}$$

og þá fáum við summuna $7 \cdot 30 + 15 = 210 + 15 = 225$.

2. Hvaða tala er minnst?

 2^{32} 4^{16} 8^8 16^4 Svar: 16^4 **Lausn:** Athugum að

$$4^{16} = (2^2)^{16} = 2^{2 \cdot 16} = 2^{32}, \quad 8^8 = (2^3)^8 = 2^{3 \cdot 8} = 2^{24} \quad \text{og} \quad 16^4 = (2^4)^4 = 2^{4 \cdot 4} = 2^{16}$$

og þá sést að tölurnar eru allar 2 í einhverju veldi og síðasta veldið er lægst og því er 16^4 minnsta talan.

3. Látum f_m, f_n og f_u tákna fjölda bókstafanna m, n og u í orðinu „nunnununnunum“. Hvaða tala er $f_m + f_n + f_u - f_m \cdot f_n \cdot f_u$?

0

-18

-38

-47

Svar: -47

Lausn: Við sjáum að

$$f_m + f_n + f_u - f_m \cdot f_n \cdot f_u = 2 + 6 + 5 - 2 \cdot 6 \cdot 5 = 13 - 60 = -47.$$

4. Guðmundur er með tíu blöð. Sum þeirra eru rétthyrningslaga og önnur þríhyrningslaga. Hann klippir þrjú af rétthyrningslaga blöðunum þannig að hvert um sig myndar tvo þríhyrninga. Hann telur síðan öll hornin á blöðunum 13 og fær útkomuna 42. Hve marga þríhyrninga var Guðmundur með áður en hann klippti rétthyrningana?

4

5

6

7

Svar: 4

Lausn: Hér væri hægt að stilla upp nokkrum jöfnum en ein leiðin er einfaldlega að prófa sig áfram með svarmöguleikana sem gefnir eru:

4 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $4+2\cdot 3=10$ og rétthyrningarnir 3. Horn: $3\cdot 10+3\cdot 4=42$.

5 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $5+2\cdot 3=11$ og rétthyrningarnir 2. Horn: $3\cdot 11+2\cdot 4=41$.

6 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $6+2\cdot 3=12$ og rétthyrningarnir 1. Horn: $3\cdot 12+1\cdot 4=40$.

7 þríhyrningar: Þá verða þríhyrningarnir $7+2\cdot 3=13$ og rétthyrningarnir 0. Horn: $3\cdot 13+0\cdot 4=39$.

Svo Guðmundur var með 4 þríhyrninga í upphafi.

5. Stærðin $\frac{1/3 + 1/4}{5/6}$ er jöfn

1/3

7/10

5/6

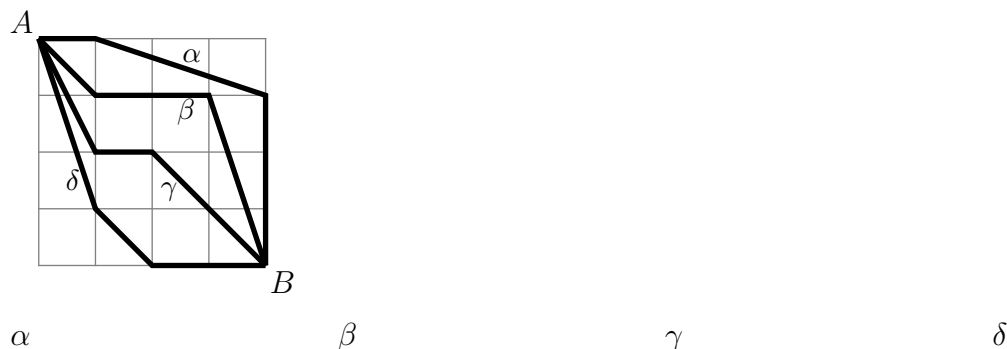
1

Svar: $\frac{7}{10}$

Lausn: Við lengjum brotabrotið með minnsta samnefnara smábrotanna, sem er 12, og fáum

$$\frac{1/3 + 1/4}{5/6} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 12}{\frac{5}{6} \cdot 12} = \frac{4 + 3}{10} = \frac{7}{10}.$$

6. Áróra hefur úr fjórum leiðum að velja til að komast frá A til B . Hvaða leið er lengst?



Svar: α

Lausn: Við fáum með reglu Pýþagórasar að

$$\text{Lengd } \alpha = 1 + \sqrt{3^2 + 1^2} + 3 = 4 + \sqrt{10},$$

$$\text{Lengd } \beta = \sqrt{1^2 + 1^2} + 2 + \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{10} < 2 + 2 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10} = \text{Lengd } \alpha,$$

$$\text{Lengd } \gamma = \sqrt{1^2 + 2^2} + 1 + \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{5} + 1 + \sqrt{8} < 3 + 1 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10} = \text{Lengd } \alpha \text{ og}$$

$$\text{Lengd } \delta = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} + 2 = \sqrt{10} + \sqrt{2} + 2 = \text{Lengd } \beta < \text{Lengd } \alpha.$$

Svo leiðin merkt α er lengsta leiðin.

7. Halldóra kaupir bland í poka á nammibar og velur sér 100 nammimola. Halldóra vill að nammipokinn endist nákvæmlega í fimm daga en á hverjum degi fær hún sér 6 fleiri mola en daginn á undan. Hversu marga mola á hún að borða fyrsta daginn?

2 5 8 14

Svar: 8

Lausn: Látum x vera fjölda namma sem Halldóra á að borða fyrsta daginn. Þá fáum við:

$$x + (x + 6) + (x + 6 + 6) + (x + 6 + 6 + 6) + (x + 6 + 6 + 6 + 6) = 100 \Leftrightarrow 5x + 10 \cdot 6 = 100$$

$$\Leftrightarrow 5x + 60 = 100$$

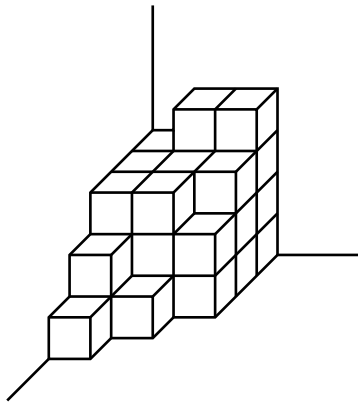
$$\Leftrightarrow 5x = 100 - 60$$

$$\Leftrightarrow 5x = 40$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

svo Halldóra á að fá sér 8 nammimola fyrsta daginn.

8. Þó nokkrum eins teningslaga kubbum er staflað reglulega í horn. Í hve marga af kubbum sést ekkert í?



12

13

19

32

Svar: 13

Lausn: Sjáum fyrst fyrir okkur hve margir kubbar eru á hverri hæð og í hve marga sést.

Á 1. hæð eru 12 kubbar og það sést í 5 þeirra. Því eru $12-5=7$ kubbar sem ekki sést í.

Á 2. hæð eru 10 kubbar og það sést í 5 þeirra. Því eru $10-5=5$ kubbar sem ekki sést í.

Á 3. hæð eru 8 kubbar og það sést í 7 þeirra. Því eru $8-7=1$ kubbur sem ekki sést í.

Á 4. hæð eru 2 kubbar og það sést í þá báða. Því eru 0 kubbar sem ekki sést í.

Alls sést því í $7 + 5 + 1 + 0 = 13$ kubba.

9. Eftir að innritun lauk í framhaldsskólana vorið 2024 fengu 224 nemendur skólavist á náttúrufræðibraut í MR. Af þessum 224 nemendum tóku 67 þátt í stærðfræðikeppni grunnskólanema í MR um veturinn í 10. bekk. Hvað eru það um það bil mörg prósent nýnemanna?

U.p.b. 10%

U.p.b. 25%

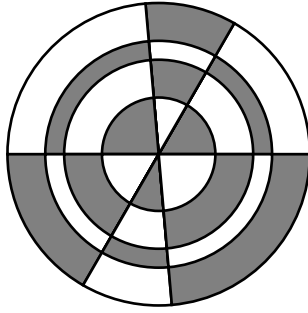
U.b.b. 30%

U.b.b. 50%

Svar: U.p.b. 30%

Lausn: Þetta er hægt að leysa á ýmsa vegu með því að námunda tölurnar. T.d. má sjá að $0,3 \cdot 224 = 67,2 \approx 67$ og því er svarið u.þ.b. 30%.

10. Allir hringirnir fjórir hafa sömu miðju. Geislar þeirra eru $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, 3 og 4. Allir strengirnir ganga í gegnum miðju hringins. Hvert er samanlagt flatarmál skyggðu svæðanna?

 8π 16π $\frac{37\pi}{4}$

Ónógar upplýsingar

Svar: 8π

Lausn: Við tökum eftir því að ef við víxlum á gráum svæðum í einum hringeira í efri hálfhringnum við hvítu svæðin í hringgeiranum beint á móti þá verður efri geirinn alveg óskyggður en sá neðri alveg skyggður. Gerum þetta við öll efri skyggðu svæðin og fáum þá óskyggðan efri hálfhring og skyggðan neðri hálfhring. Þá má auðveldlega sjá að flatarmálið er helmingur flatarmáls hringa með geisla 4 og er þá

$$\frac{4^2\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

Annar hluti

Í þessum hluta eru 8 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

11. Í tölvuleik fær spilari 4 stig fyrir að ná í jarðarber, 7 stig fyrir að ná í gullpening og 12 stig fyrir að ná í demant. Georg spilar tölvuleikinn og fær: jarðarber, jarðarber, demant, gullpening, gullpening, gullpening, gullpening, jarðarber, demant. Hvað fær Georg mörg stig?

Svar: 64

Lausn: Þar eð Georg fær þrjú jarðarber, fjóra gullpeninga og tvo demanta fær hann alls

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 12 = 12 + 28 + 24 = 64 \text{ stig.}$$

12. Leysið jöfnuna: $\frac{x}{3} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}(5 - 2x)$.

Svar: $x = 5$

Lausn: Fáum að $x = 5$ þar eð

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} - 1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{12}(5 - 2x) \Leftrightarrow 4x - 12 = 3 - (5 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 4x - 12 = 3 - 5 + 2x \\ &\Leftrightarrow 4x - 2x = 12 + 3 - 5 \\ &\Leftrightarrow 2x = 10 \\ &\Leftrightarrow x = 5.\end{aligned}$$

-
13. Viðar og Fura fá happdrættismiða til að selja og eru miðarnir 200 talsins og tölusettir frá 1 til 200. Viðar selur miða 88-112 og Fura selur miða 150-200. Hve marga miða selja þau alls?

Svar: 76

Lausn: Þau selja alls:

$$(112 - 88 + 1) + (200 - 150 + 1) = 25 + 51 = 76 \text{ miða.}$$

Athugið að bæta þarf einum við eftir hvorn frádrátt því miðar með hæsta og lægsta númeri eru seldir í báðum tilvikum.

-
14. Sjö piltar og ein stúlka frá skóla einum taka þátt í stærðfræðikeppni. Meðalstigafjöldi strákanna var 58 stig. Hvað var stúlkan með mörg stig ef meðalstigafjöldi allra átta krakkanna var 60?

Svar: 74 stig

Lausn: Þetta er hægt að leysa á ýmsa vegu, t.d. á eftirfarandi hátt. Látum x vera stigafjölda stúlkunnar. Þá fáum við

$$\begin{aligned}\frac{7 \cdot 58 + x}{8} &= 60 \Leftrightarrow 7 \cdot (60 - 2) + x = 8 \cdot 60 \\ &\Leftrightarrow 7 \cdot 60 - 7 \cdot 2 + x = 8 \cdot 60 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \cdot 60 - 7 \cdot 60 + 14 \\ &\Leftrightarrow x = 60 + 14 \\ &\Leftrightarrow x = 74.\end{aligned}$$

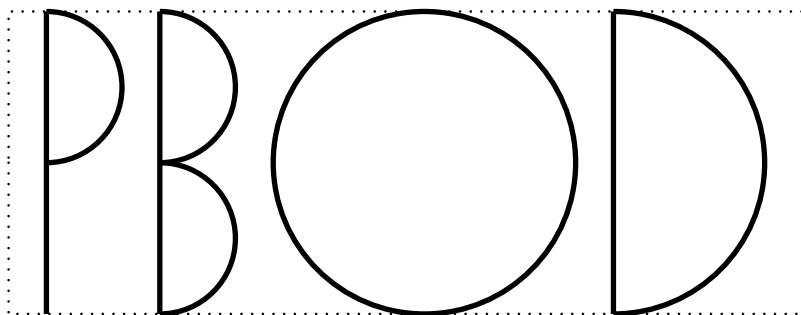
Svo stúlkan fékk 74 stig í stærðfræðikeppninni.

15. Rauð geimvera lendir á jörðinni. Hún snertir þrjá jarðarbúa sem sýkjast og verða allir rauðir. Geimveran deyr síðan samstundis. Næsta dag snertir sérhver hinna rauðu jarðarbúa þrjá ósýkta jarðabúa sem allir sýkjast og verða líka rauðir. Allir hinna sýktu eru einungis snertir af einum sýktum jarðarbúa. Sýktu jarðarbúarnir þrír deyja svo samstundis. Sérhver hinna nýju sýktu jarðarbúa snertir þrjá ólíka ósýkta jarðabúa daginn eftir og þannig heldur ferlið áfram. Hve margir jarðarbúar sýkjast á 4. deginum?

Svar: 81

Lausn: Fjöldi sýktra einstaklinga þrefaldast alltaf frá deginum á undan. Fjöldinn verður því $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$.

16. Orðinu PBOD er komið fyrir í rétthyrningi með hæð 8 eins og myndir sýnir. Stafirnir eru gerðir úr lóðréttum strikum, hringjum eða hálfhringjum þar sem geisli (radíus) minni hálfhringjanna er helmingur af geisla stærri hálfhringsins. Hvert er sameiginlegt flatarmál hálfhringjanna og hringsins sem orðið myndar? Gefið svarið á forminu $n\pi$ þar sem n er heil tala.

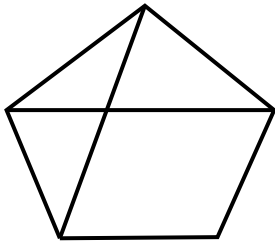


Svar: 30π

Lausn: Geisli minni hálfhringjanna er 2 en geisli stóra hálfhringsins og hringsins er 4. Við fáum þá sameiginlega flatarmálið

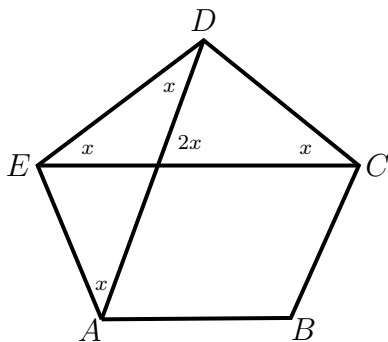
$$\underbrace{3 \cdot \frac{2^2\pi}{2}}_{\text{3 litlir hálfhringir}} + \underbrace{4^2 \cdot \pi}_{\text{stóri hringurinn}} + \underbrace{\frac{4^2\pi}{2}}_{\text{stóri hálfhringurinn}} = 6\pi + 16\pi + 8\pi = 30\pi.$$

17. Í reglulegum fimmhyrningi eru dregin tvö strik milli hornpunkta fimmhyrningsins eins og myndin sýnir. Hve stórt er hvassa hornið sem myndast við skurðpunkt strikanna tveggja?



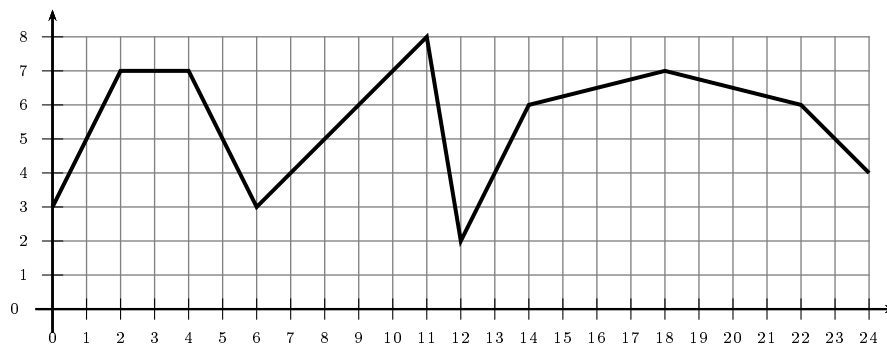
Svar: 72°

Lausn:



Merkjum hornpunkta fimmhyrningsins. Hornin merkt x eru öll jafnstór því þau eru grannhorn í hinum ýmsu jafnarma þríhyrningum og þá er hvassa hornið sem beðið er um $2x$ því það er grunnlínu-horn við þríhyrning. Þar sem hornasumma fimmhyrnings er $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ er hornastærð sérhvers horns í fimmhyrningnum $540^\circ/5 = 108^\circ$. Svo í $\triangle DCE$ gildir að $2x + 108^\circ = 180^\circ$ sem gefur að hvassa hornið er $2x = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

18. Línuritið sýnir hitastig í gráðum yfir einn sólarhring. Í hve margar klukkustundir er hitinn 5 gráður eða minna á þessum sólarhring?



Svar: 7 klst.

Lausn: Hitinn er 5°C eða minna á tímabilunum $[0;1]$, $[5;8]$, $[11,5;13,5]$ og $[23;24]$. Lengd bilanna er því $1 + 3 + 2 + 1 = 7$ svo hitinn er 5°C eða minna í 7 klst.

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru þrjú dæmi sem eru 10 stiga virði hvert. Sýna skal aðferðina sem er notuð til þess að leysa dæmið. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu lausnaraðferðar.

19. Þriggja stafa tala á forminu $2A4$ er lögð við töluna 329 og útkoman er þriggja stafa tala á forminu $5B3$. Ef svarið, $5B3$, er deilanlegt með þremur hver er stærsta mögulega talan sem A getur verið?

Svar: 4

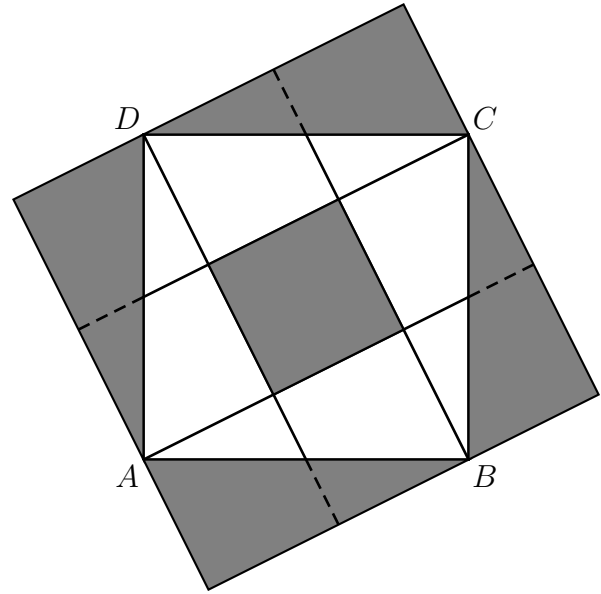
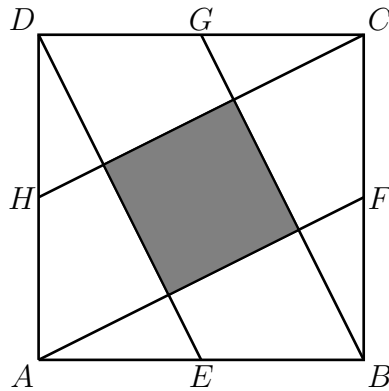
Lausn: Setjum dæmið upp:

$$\begin{array}{r} 2 \ A \ 4 \\ + \ 3 \ 2 \ 9 \\ \hline 5 \ B \ 3 \end{array}$$

Við leggjum saman öftustu tölurnar of fáum 13, svo 1 er geymdur með tugasetunum. Þá fæst að $A+2+1=B$ og þá er $A+3=B$.

A getur ekki verið 7, 8 eða 9 því þá verður $B \geq 10$ og færi þá 1 í hundraðssætið sem gengur ekki því $2+3=5$ þegar hundraðssætið er skoðað. Þar sem svarið $5B3$ er deilanlegt með þremur getur B einungis tekið gildin 1,4 eða 7 því þá er þversumma $5B3$, þ.e. $5+B+3$ deilanleg með þremur og talan sjálf þá deilanleg með þremur. Við sjáum að $B=7$ gefur stærstu mögulega gildið á A , þannig að $A=4$.

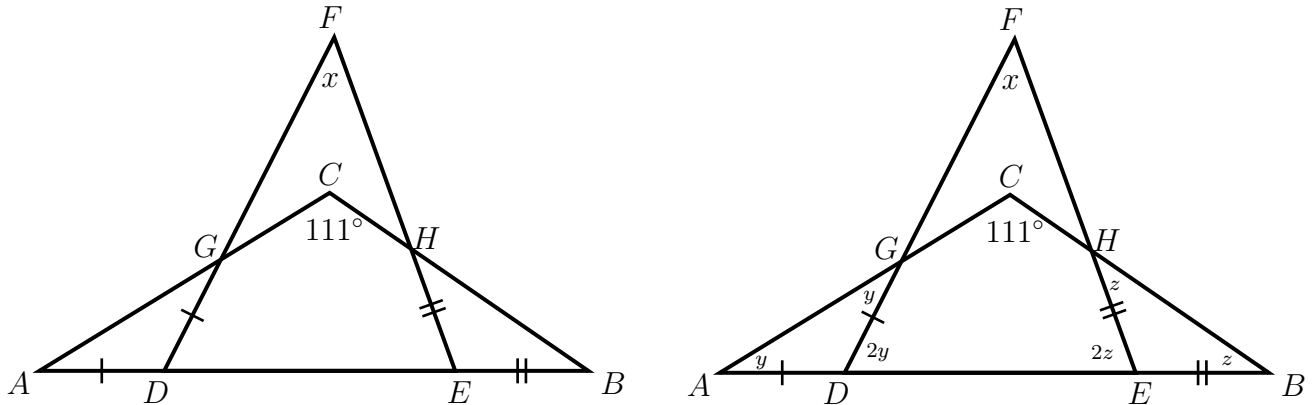
20. Á myndinni sést ferningur $ABCD$ með hliðarlengd 10. Punktarnir E, F, G og H liggja á miðju stikanna AB, BC, CD og DA . Hvert er flatarmál skyggða ferningsins sem strikin AF, BG, CH og DE afmarka?



Svar: 20

Lausn: Það er hægt að leysa þetta dæmi á ýmsa vegu. Hér er ein tilraun að lausn. Við drögum hliðar á nýjum ferningi sem fer um A, B, C og D og hefur hliðar samsíða hliðum gráa rétthyrningsins. Þá myndast fjórir nýir (skyggðir) þríhyrningar sem hafa sama samanlagða flatarmál og óskyggða svæðið á rétthyrningnum $ABCD$ því t.d. skiptir hornalínan CD viðeigandi rétthyrningi í tvo eins þríhyrninga. Þá er flatarmál óskyggða svæðisins eins og fjórir skyggðir rétthyrningar og því er flatarmál skyggða rétthyrningsins $1/5$ af flatarmáli rétthyrningsins $ABCD$ þ.e. $\frac{10 \cdot 10}{5} = 20$. Flatarmál skyggða rétthyrningsins er því 20.

21. Á myndinni sjást tveir þríhyrningar sem við köllum $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Hliðin AC sker hliðina DF í punkti G og hliðin EF sker hliðina BC í punkti H á þann hátt að hliðarlengdirnar AD og DG eru jafnlangar og hliðarlengdirnar EH og EB eru jafnlangar. Einnig er gefið að hornið C í $\triangle ABC$ er 111° . Finnið stærð hornsins F (merkt x) á myndinni.



Svar: 42°

Lausn:

Við höfum að $y = \angle GAD = \angle AGD$ og $z = \angle EHB = \angle HBE$ því $\triangle AGD$ og $\triangle HBE$ eru jafnarma þríhyrningar. Lítum á $\triangle ABC$. Við fáum að

$$y + z + 111^\circ = 180^\circ \text{ svo } y + z = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ.$$

Lítum á þríhyrninginn $\triangle DEF$. Fáum að $\angle D = 2y$ og $\angle E = 2z$ þar eð hornin eru grannhorn við þríhyrningana $\triangle AGD$ og $\triangle BHE$. Merkjum stærðir horna inn á hægri myndina að ofan. Við fáum þá að

$$2y + 2z + x = 180^\circ \text{ svo } x = 180^\circ - 2(y + z) = 180^\circ - 2 \cdot 69^\circ = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ.$$

Svo $\angle F = x = 42^\circ$.