SVÖR OG LAUSNIR - 10. BEKKUR

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 10 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá

1. Hver af eftirfarandi tölum er stærst?

$\frac{75.352.942}{25.226.983}$ $\frac{926.983}{312.942}$ $\frac{8.352.942}{2.126.983}$ $\frac{912.352.942}{452.926.983}$

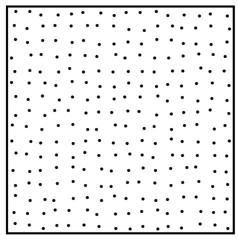
Svar: $\frac{8.352.942}{2.126.983}$

Lausn: Með því að námunda tölurnar nokkuð gróflega sést að

$$\frac{75.352.942}{25.226.983} \approx \frac{75}{25} = 3, \quad \frac{926.983}{312.942} \approx \frac{9}{3} = 3, \quad \frac{8.352.942}{2.126.983} \approx \frac{8}{2} = 4 \text{ og } \frac{912.352.942}{452.926.983} \approx \frac{90}{45} = 2$$

sem sýnir að $\frac{8.352.942}{2.126.983}$ er stærsta talan.

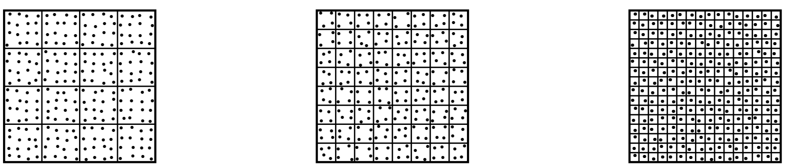
2. Hve margir punktar eru á myndinni?



64 128 256 512

Svar: 256

Lausn: Með því að draga kerfisbundið lóðréttar og láréttar línur má t.d. sjá á myndinni í miðjunni að fjórar doppur eru í hverjum ferningi og ferningarnir eru $8 \cdot 8 = 64$. Svo alls eru punktarnir $64 \cdot 4 = 256$.



3. Reiknið: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$

   $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{13}$

Svar: $\frac{1}{4}$

Lausn: Við fáum að $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4 - 3 + 2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

---

4. Hvernig breytist rúmmál sívalnings ef hæð hans er tvöfölduð en geisli (radíus) grunnflatar hans er helmingaður?

   Það tvöfaldast Það helmingast Það fjórfaldast Það helst óbreytt

---

Svar: Það helmingast.

Lausn: Rúmmál sívalnings með geisla (radíus) grunnflatar r og hæð h er $V_{\text{o}} = r^2 \pi h$. Breytum h í $2h$ og r í $r/2$. Þá fæst rúmmálið

$$V = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi\, 2h = \frac{r^2}{4} \pi\, 2h = \frac{1}{2} r^2 \pi h = \frac{1}{2} V_{\text{o}}$$

sem er helmingurinn af upphaflega rúmmálinu.

---

5. Hver af eftirfarandi setningum um þrjár samliggjandi jákvæðar heilar tölur er **EKKI** alltaf rétt?

   (a) Nákvæmlega ein talnanna þriggja er deilanleg með þremur.
   (b) Margfeldi sérhverra tveggja talnanna er deilanlegt með tveimur.
   (c) Summa talnanna þriggja er alltaf deilanleg með þremur.
   (d) Margfeldi talnanna þriggja er alltaf deilanlegt með sex.

Svar: (b) Margfeldi sérhverra tvegga talnanna er deilanlegt með tveimur.

Lausn: (a) Fyrsta fullyrðingin er alltaf rétt þar sem þriðja hver tala er deilanleg með þremur en aðrar ekki. (b) Ef tölurnar eru t.d. 1,2 og 3 þá er margfeldi 1 og 3 talan 3 sem er ekki deilanleg með tveimur. (c) Ef við táknum tölurnar með $n-1$, n og $n+1$ þar sem n er heil jákvæð tala þá er summa talnanna $3n$ sem er deilaleg með þremur. (d) Margfeldi talnanna þriggja er alltaf deilanlegt með þremur því þriðja hver tala er deilanleg með þremur. Þar eð a.m.k. ein talnanna þriggja er einnig deilanleg með tveimur er margfeldi talnanna deilanlegt með tveimur. Þar með er margfeldi talnanna deilanlegt með 6.

---

6. Hvað eru margir tölustafir í svarinu ef reiknað er upp úr 2^{20}?

2 4 7 10

Svar: 7

Lausn:
Við getum ritað $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$. Við getum t.d. fundið 2^{10} með því að prófa okkur áfram: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$. Við sjáum að $2^{10} = 1024$ sem er aðeins hærra en 1000. Og því er $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$ aðeins stærra en 1000×1000 sem er 1.000.000 sem inniheldur 7 tölustafi. Því inniheldur 2^{20} einnig 7 tölustafi.

---

7. Jónas ætlar að mála vegg. Fyrsta daginn málar hann 2/3 hluta veggjarins. Næsta dag málar hann 2/3 af því sem hann átti eftir. Þriðja daginn málar hann svo 2/3 af því sem hann á þá eftir. Hve hátt hlutfall veggjarins á Jónas þá eftir að mála?

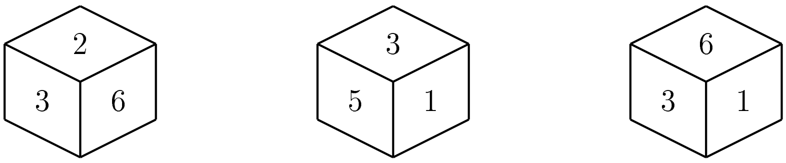
$\frac{1}{3}$ $\frac{16}{81}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{81}$

Svar: $\frac{1}{27}$

Lausn: Jónas skilur alltaf eftir 1/3 af því svæði sem eftir er þegar hann málar. Því er hlutfall ómálaða svæðsins eftir 3 daga $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

---

8. Myndirnar sýna sama tening frá ýmsum sjónarhornum og tölurnar sýna fjölda depla á hliðunum sem sjást. Hve margir deplar eru á hliðinni sem er á móti hliðinni sem merkt er með 6?



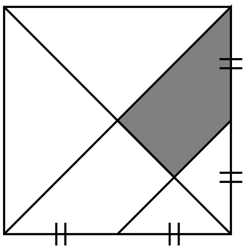
4 5 6 Fleiri en ein tala er möguleg

Svar: 5

Lausn: Á aðra myndina sést talan 6 ekki svo einu tölurnar sem koma til greina eru 1,3 og 5. Með því að skoða þriðju myndina sést að 1 og 3 koma ekki til greina svo 5 er á móti hliðinni sem merkt er með 6.

---

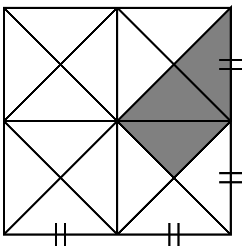
9. Ferningi er skipt eins og myndin sýnir. Hvert er hlutfallið milli flatarmáls skyggða svæðisins og flatarmáls ferningsins?



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{3}{32}$

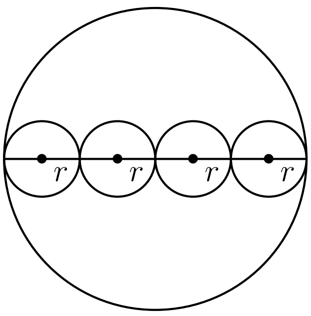
Svar: $\frac{3}{16}$

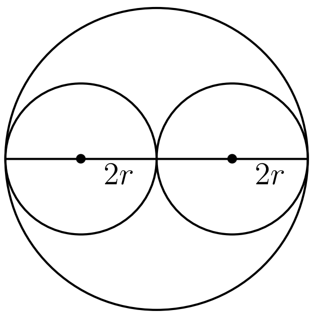
Lausn:
Með því að draga nokkur aukastrik má skipta myndinni í 16 eins þríhyrninga. Af þeim eru 3 skyggðir.



---

10. Stóru hringirnir á myndunum tveimur eru jafnstórir með geisla $4r$ og strikið innan í þeim liggur í gegnum miðju þeirra. Látum A tákna samanlagt ummál innri hringanna fjögurra á vinstri myndinni og B tákna samanlagt ummál innri hringanna tveggja á hægri myndinni. Geislar innri hringanna eru sýndir á myndunum. Hver af eftirfarandi fullyrðingum er rétt?





$A = 2B$ $A = B$ $B = 2A$ $B = 4A$

Svar: $A = B$

Lausn: Við fáum að $A = (2r)\pi \cdot 4 = 8\pi r$ og $B = (2 \cdot 2r)\pi \cdot 2 = 8\pi r$. Svo $A = B$.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 8 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

---

11. Lítum á töluna $x = 4682$. Víxlað er á einhverjum tveimur tölustöfum í tölunni x og sú tala er dregin frá x. Hver er minnsta mögulega útkoma sem hægt er að fá?

    Svar: -3960

    Lausn: Við viljum að talan sem við drögum frá sé sem stærst. Hún fæst með því að fremsti tölustafurinn verði 8. Stærsta talan er því 8642. Þá fæst með hefðbundnum reikningum að $4682 - 8642 = -3960$.

---

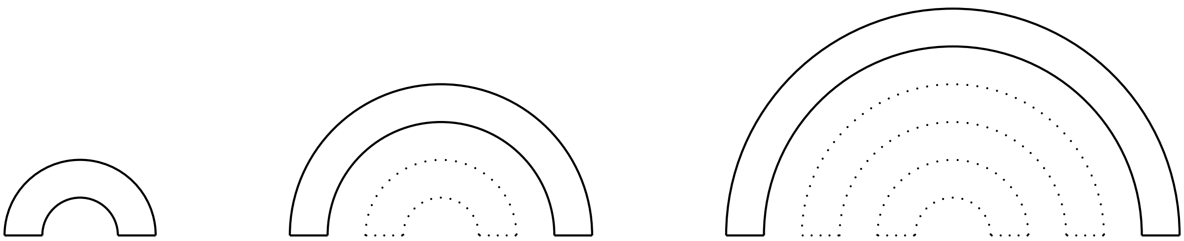
12. Hver er stærsta þriggja stafa talan sem hefur þann eiginleika að allir tölurstafirnir eru jákvæðir og summa tölustafanna í tölunni er stærri en margfeldi tölustafanna í tölunni?

    Svar: 911

    Lausn: Við sjáum að talan 911 uppfyllir skilyrðin þar eð þversumman $9+1+1=11$ er stærri en margfeldi talnanna $9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$. Augljóslega uppfylla tölurnar 921, 912 og 922 ekki skilyrðin. Þriggja stafa tölur sem byrja á 9 og innihalda ekki 0 en hafa 3 eða hærra í einingarsæti eða tugasæti uppfylllla heldur ekki skilyrðin þar eða margfeldi tölustafnna þriggja er a.m.k. 27 sem er aldrei lægra en þversumma þriggja stafa tölu. Því er 911 talan sem óskað var eftir.

---

13. Flatarmynd er gerð úr tveimur strikum sem er hvort um sig 1 cm að lengd og tveimur hálfhringum. Á fyrstu myndinni er geisli (radíus) innri hálfhringsins 1 cm. Á annarri mynd er sams konar flatarmynd en þá er geisli innri hringsins 3 cm. Á þriðju myndinni er enn sams konar flatarmynd en geisli innri hringsins er þá 5 cm. Ef þessu er haldið áfram hvert verður ummál flatarmyndarinnar í sentimetrum sem fram kæmi á tíundu mynd?



    Svar: $39\pi + 2$

    Lausn: Mynd nr. n hefur innri geisla $2n-1$ og ytri geisla $2n$ þar sem n er jákvæð heiltala. Því er hringur nr. 10 með innri geisla 19 og ytri geisla 20. Ummál myndar nr. 10 fæst þá með því að leggja saman lengd innri hálfhrings, ytri hálfhrings og litlu strikanna. Ummál í sentimetrum er því $\frac{19 \cdot 2\pi}{2} + \frac{20 \cdot 2\pi}{2} + 2 = 39\pi + 2$.

---

14. Anna og Bára spjalla saman um leikina í símunum sínum. Það kemur í ljós að Bára á einum leik fleiri en Anna í símanum sínum. Bæði Anna og Bára spila alla leikina í sínum símum á hverjum degi og hvern þeirra nákvæmlega einu sinni. Á einu ári þá tekst Báru alltaf að spila leikina sína í mismunandi röð en Anna á ekki möguleika á því. Hve marga leiki er Anna með í símanum sínum?

    Svar: 5

    Lausn: Athugum á hve marga vegu má raða tveimur, þremur, fjórum, fimm eða sex leikjum. Við fáum að $2 \cdot 1 = 2; 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6; 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24; 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ og $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Þar sem $120 < 365 < 720$ er ljóst að Bára er með 6 leiki í símanum sínum og Anna með 5 leiki í sínum.

---

15. Ef að „$+$“ merkir „$/$“, „$-$“ merkir „$\cdot$“, „$/$“ merkir „$+$“ og „$\cdot$“ merkir „$-$“ hvað er þá $32/75 + 15 \cdot 15 - 4$?

    Svar: -23

    Lausn: Við breytum merkjunum og fáum $32 + 75/15 - 15 \cdot 4 = 32 + 5 - 60 = -23$.

---

16. Anna og Sigurður ganga eftir beinum vegi. Í upphafi eru 50 m á milli þeirra. Fyrst gengur Anna 8 m í átt að Sigurði og á sama tíma gengur Sigurður tvöfalt lengri vegalegnd í átt að Önnu. Eftir það gengur Sigurður 6 m aftur til baka og á sama tíma gengur Anna 2 m aftur til baka. Hvað er þá langt á milli Önnu og Sigurðar í metrum?

    Svar: 34

    Lausn: Anna gengur í raun $8 - 2 = 6$ metra í átt að Sigurði. Á sama tíma gengur Sigurður í raun $8 \cdot 2 - 6 = 10$ metra í átt að Önnu. Þá eru $50 - 6 - 10 = 34$ metrar á milli Önnu og Sigurðar.

---

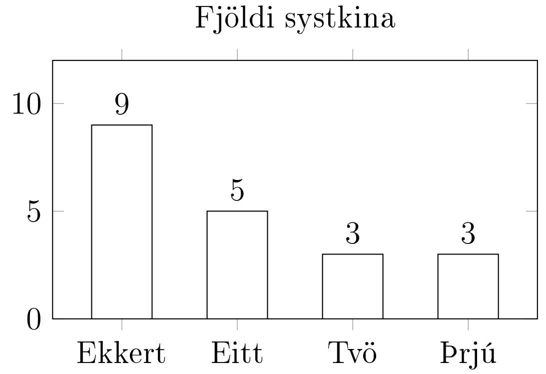
17. Flík kostar 1000 kr. Á tíu árum hækkar verð hennar um 300%. Á næstu 10 árum hækkar verð hennar um 400%. Hve margar krónur kostar flíkin þá?

    Svar: 20.000

    Lausn: Eftir 20 ár mun flíkin kosta $1000 \cdot (1 + 3) \cdot (1 + 4) = 1000 \cdot 4 \cdot 5 = 20.000$ krónur.

---

18. Í bekk einum eru 20 börn og ekkert af þeim er skylt neinu hinna. Allir krakkarnir í bekknum voru beðnir um að rita fjölda systkina og má sjá niðurstöðuna á súluritinu. Á systkinadegi koma öll systkinin með krökkunum í kennslustofuna. Hvað eru þá margir í kennslustofunni ef kennarinn er ekki talinn með?



Svar: 40

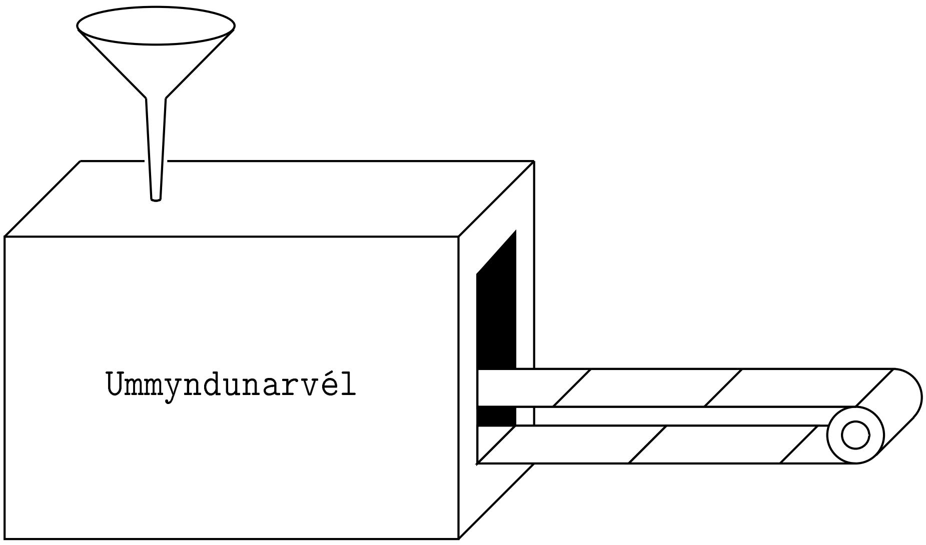
Lausn: Í stofunni eru krakkarnir 20 og að auki $5 \cdot 1 = 5$, $3 \cdot 2 = 6$ og $3 \cdot 3 = 9$ systkini. Svo það eru alls $20 + 5 + 6 + 9 = 40$ einstaklingar í stofunni.

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru þrjú dæmi sem eru 10 stiga virði hvert. Sýna skal aðferðina sem er notuð til þess að leysa dæmið. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu lausnaraðferðar.

---

19. Í vélina hér að neðan má setja heilar jákvæðar tölur. Vélin vinnur þannig að ef slétt tala er sett í vélina þá helmingar hún töluna en ef oddatala er sett í vélina þá þrefaldar hún töluna og bætir einum við. Ef útkoma úr vélinni er ekki einn þá er útkoman sett aftur í vélina og vinnslan endurtekin. Hversu oft keyrir vélin ef ákveðið er að setja töluna 24 í vélina?

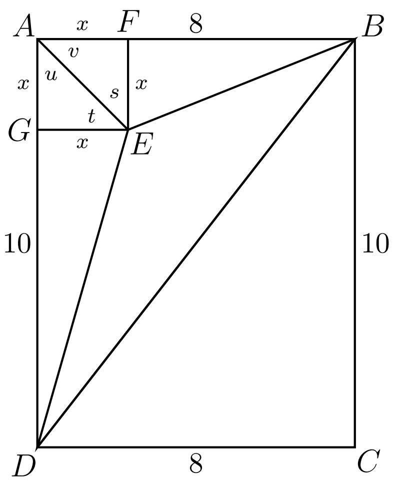


Lausn:
1. keyrsla. Við fáum útkomuna 24/2=12.
2. keyrsla. Við fáum útkomuna 12/2=6.
3. keyrsla. Við fáum útkomuna 6/2=3.
4. keyrsla. Við fáum útkomuna $3 \cdot 3 + 1 = 10$.
5. keyrsla. Við fáum útkomuna $10/2 = 5$.
6. keyrsla. Við fáum útkomuna $3 \cdot 5 + 1 = 16$.
7. keyrsla. Við fáum útkomuna $16/2 = 8$.
8. keyrsla. Við fáum útkomuna $8/2 = 4$.
9. keyrsla. Við fáum útkomuna $4/2 = 2$.
10. keyrsla. Við fáum útkomuna $2/2 = 1$.

Vélin keyrir því **10 sinnum**.

---

20. Myndin sýnir rétthyrning $ABCD$ þar sem hliðin AB er 8 að lengd og hliðin BC er 10 að lengd. Strikið AE helmingar hornið A og er $\sqrt{8}$ að lengd. Finnið flatarmál þríhyrningsins BDE.



Lausn: Við drögum hæðirnar EF og EG í þríhyrningunum ABE og ADE. Þar eð AE helmingar $\angle A$ er $u = v = 45°$ og þá er $s = t = 45°$ og því eru $\triangle AEF$ og $\triangle AEG$ jafnarma og því fæst að $x = |AF| = |EF| = |AG| = |EG|$. Regla Pýþagórasar gefur þá að

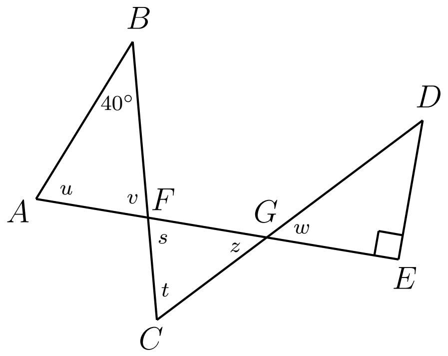
$$x^2 + x^2 = \sqrt{8}^2 \quad \text{þ.e.} \quad 2x^2 = 8 \quad \text{þ.e.} \quad x^2 = 4 \quad \text{þ.e.} \quad x = 2$$

því $x > 0$. Þá má t.d. reikna flatarmál $\triangle BDE$ með

$$\begin{aligned} F_{\triangle BDE} &= F_{ABCD} - F_{\triangle ABE} - F_{\triangle ADE} - F_{\triangle BCD} \\ &= 8 \cdot 10 - \frac{8 \cdot 2}{2} - \frac{10 \cdot 2}{2} - \frac{8 \cdot 10}{2} \\ &= 80 - 8 - 10 - 40 = 22, \end{aligned}$$

þ.e. $F_{\triangle BDE} = \mathbf{22}$.

21. Á myndinni liggja punktarnir A, F, G og E á beinni línu. Punktarnir B, F og C liggja einnig á beinni línu og það sama gildir um punktana C, G og D. Strikin AB og BF eri jafnlöng og strikin FG og CG eru einnig jafnlöng. Að auki er $\angle B = 40°$ og $\angle E = 90°$. Finnið stærð hornsins D í gráðum.



Lausn: Við fáum að $u = v$ því $\triangle ABF$ er jafnarma. Svo

$$2v + 40° = 180° \quad \text{þ.e.} \quad 2v = 140° \quad \text{þ.e.} \quad v = 70°.$$

Þá er $s = 70°$ því v og s eru topphorn. Þar eð $\triangle CFG$ er jafnarmarma með topphorn G er $t = s = 70°$ sem gefur að $z = 180° - 70° - 70° = 40°$. Þá er $w = z = 40°$ því w og z eru topphorn.

Þá fæst að lokum að $\angle D = 180° - 90° - 40° = 50°$.