

Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík

fyrir grunnskólanema,

haldin 14. mars 2023

9. bekkur

Lausnir

Dæmi 1. Svar: 44.

LAUSN: Hér fæst $7 \cdot 8 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 = 56 + 0 - 12 = 44$.

Dæmi 2. Svar: 3.

LAUSN: Talan 1 er ekki framtala en 2 er eina slétta framtalan. Tölurnar 3 og 19 eru framtölur. Tölurnar 15 og 27 eru deilanlegar með 3 og því ekki framtölur. Hér eru því þrjár framtölur.

Dæmi 3. Svar: 2.

LAUSN: Hér fæst að $\frac{6+4}{n} = 5$ er jafngilt $6+4 = 5n$ eða $10 = 5n$ sem gefur $n = 2$.

Dæmi 4. Svar: 2020.

LAUSN: Hér má taka 101 útfyrir sviga og fá

$$2 \cdot 101 + 3 \cdot 101 + 4 \cdot 101 + 5 \cdot 101 + 6 \cdot 101 = 101 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 101 \cdot 20 = 2020.$$

Dæmi 5. Svar: $\frac{13}{16}$.

LAUSN: Við gerum samnefnt og fáum $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+1}{16} = \frac{13}{16}$.

Dæmi 6. Svar: $\frac{5}{12}$.

LAUSN: Við gerum brotin samnefnd og fáum $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$, $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$ og

þá sést að $\frac{5}{12}$ er stærst.

Dæmi 7. Svar: 4:10.

LAUSN: Átta klukkustundum frá klukkna 7:25 er klukkna orðin 15:25 eða 3:25 eftir hádegi (sem er ekki tekið fram í dæminu) 45 mínútum síðar er klukkna orðin 4:10 sem er þá svarið.

Dæmi 8. Svar: 50° .

LAUSN: Nú er hornasumma þríhyrnings 180° svo $\angle ABE = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$. Nú mynda hornin $\angle ABD$ og $\angle DBC$ beina línu (grannhorn) svo hornasumma þeirra er 180° sem gefur $\angle DBC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Að lokum fæst $\angle BDC = 180^\circ - (100^\circ + 30^\circ) = 50^\circ$.

Dæmi 9. Svar: 0.

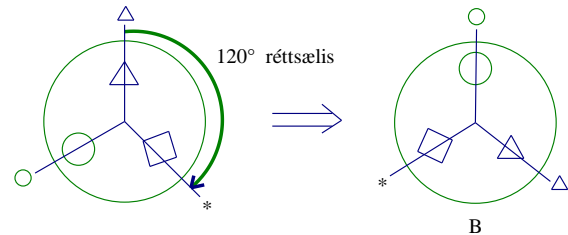
LAUSN: Við getum valið hvaða samliggjandi jákvæðar heiltölur sem er. Hvert þannig margfeldi hefur a.m.k. eitt margfeldi af 5 og a.m.k. eitt margfeldi af 2. Þá er a.m.k. einn þáttur í tölunni $5 \cdot 2 = 10$ svo talan endar á 0.

Dæmi 10. Svar: 868 kr.

LAUSN: Hér fæst að 20% afsláttur af 1000 kr. er 200 kr. sem gefa verðið 800 kr. Síðan dragast 100 kr. frá og þá er verðið orðið 700. Svo bætist 24% virðisauki við, sem gefur $700 \cdot 0,24 = 168$ kr. og þá er lokaverði súpunnar $700 + 168 = 868$ kr.

Dæmi 11. Svar: B

LAUSN: Sjá mynd.



Dæmi 12. Svar: 7.

LAUSN: Hér þarf $N + 2$ að vera jákvæð heiltala og ganga upp í 36. Tölurnar sem ganga upp í 36 eru 36, 18, 12, 9, 6, 3, 2 og 1. En hér gildir að $N + 2 > 2$ svo einungis tölurnar $34 + 2, 16 + 2, 10 + 2, 4 + 2, 2 + 2, 1 + 2$ koma til greina sem $N + 2$ og þær eru 7 talsins.

Dæmi 13. Svar: A) Flatarmál skyggðu svæðanna eru öll jöfn í öllum þremur ferningunum.

LAUSN: Skyggða svæðið í ferningi II er greinilega $\frac{1}{4}$ af flatarmáli ferningsins. Í ferningi I er flatarmál hvers þríhyrnings helmingur af $\frac{1}{4}$ eða $\frac{1}{8}$ af flatarmálinu og samtals er flatarmál skyggðu svæðanna í II því $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ af flatarmáli ferningsins. Í ferningi III má skipta hverjum tígli í tvo þríhyrninga og er flatarmál hvers þríhyrnings $\frac{1}{4}$ af $\frac{1}{4}$ eða $\frac{1}{16}$ af flatarmáli ferningsins og þríhyrningarnir 4 hafa því flatarmálið $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ af flatarmáli ferningsins. Skyggðu svæðin í ferningunum þrem eru því öll jöfn.

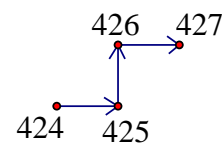
Hér má einnig skoða myndirnar að ofan til þess að átta sig á launsinni. T.d. eru tveir þríhyrningar af átta eins þríhyrningum skyggðir í ferningi I og fjórir af 16 í ferningi III.

Dæmi 14. Svar: 36.

LAUSN: Nú spila tvö börn saman hvert spil og það gera samtals $2 \cdot 90 = 180$ mínútur alls í spilatíma. Þessum tíma er skipt jafnt á milli barnanna 5 þannig að hver barn spilar í $180 / 5 = 36$ mínútur.

Dæmi 15. Svar: A.

LAUSN: Leiðin endurtekur sig með fjögurra skrefa millibili. Ef við deilum 4 í 245 fáum við 1 í afgang og við fáum 3 í afgang ef við deilum 4 í 427 þannig að leiðin frá 425 til 427 er eins og leiðin frá 1 til 3. Sjá mynd.



Dæmi 16. Svar: 0.

LAUSN: Kvaðratrótin af 49 er 7 og tala 7 er þáttur í 49 svo talan 7 er líka þáttur í 49 í öðru veldi svo deilingin gengur upp og afgangurinn er 0.

Dæmi 17. Svar: 336.

LAUSN: Síðastliðið skólaár var hlutfall stúlkna í skólanum $\frac{315}{600} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$. Nú í ár hefur nemendum fjölgað um 40 en hlutfall stúlkna haldist óbreytt. Þeim hefur því fjölgað um $\frac{21}{40} \cdot 40 = 21$ stúlku. Heildarfjöldi stúlkna er því $315 + 21 = 336$.

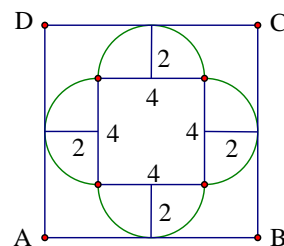
Dæmi 18. Svar: $x = -\frac{5}{23}$.

LAUSN: Höfum

$$7x - 3 = \frac{4}{5}(3x - 5) \Leftrightarrow 5 \cdot (7x - 3) = 4 \cdot (3x - 5) \Leftrightarrow 35x - 15 = 12x - 20 \Leftrightarrow 35x - 12x = -20 + 15$$
$$\Leftrightarrow 23x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{23}$$

Dæmi 19. Svar: 64.

LAUSN: Geisli hvers hálfhrings er hálf hlið minni ferningsins eða 2. Þá sést að hliðarlengd ferningsins ABCD er $4 + 2 + 2 = 8$ (ein hlið og tveir geislar) þannig að flatamál ferningsins ABCD er þá $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$.



Dæmi 20. Svar: 26.

LAUSN: Berta á $30 - 6 = 24$ barnabörn sem öll eru dætradætur og engin þeirra á dætur. Dætradæturnar eru börn $24/6 = 4$ af dætrum Bertu, svo að fjöldi kvenna sem á engar dætur er $30 - 4 = 26$.

Dæmi 21. Svar: 9.

LAUSN: Þar sem ummál stærri ferningsins er þrefalt ummál minni ferningsins er hliðarlengd stærri ferningsins þreföld hliðarlengd þess minni. Flatarmál fernings er hliðarlengd í öðru veldi svo það þarf að margfalda flatarmálið með $3^2 = 9$.

Dæmi 22. Svar: $\frac{25}{72}$.

LAUSN: Brot verður minnst ef við veljum minnstu töluna í teljara og stærstu í nefnara brotsins. Við notum því 1 og 2 í teljara brotanna og 8 og 9 í nefnara þeirra. Þá fást tveir kostir þ.e.

$\frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{9+16}{72} = \frac{25}{72}$ og $\frac{1}{9} + \frac{2}{8} = \frac{8+18}{72} = \frac{26}{72}$ og þá sést að $\frac{25}{72}$ er minnsta summan sem hægt er að fá.

Dæmi 23. Svar: 48.

LAUSN: Látum fjarlægðina frá Laxnesi að Lækjargötu vera d kílómetra. Nú gildir

$$tími = \frac{\text{vegalengd}}{\text{harða}}. \text{ Tíminn sem Lárus er að aka að Lækjargötu er þá } \frac{d}{60} \text{ klst. og tíminn sem það}$$

tekur hann að aka til baka er $\frac{d}{40}$ klst. Samtals tekur ferðin fram og til baka þá

$$\frac{d}{60} + \frac{d}{40} = \frac{2d+3d}{120} = \frac{5d}{12} = \frac{d}{24} \text{ klst. Heildarvegalengdin sem hann ekur er } 2d \text{ og þá fæst}$$

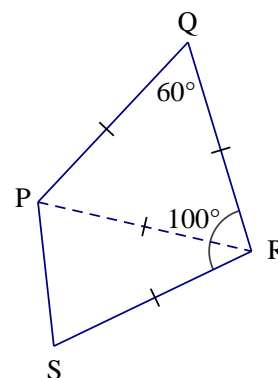
hraðinn sem vegalengd deilt með tíma eða $\frac{2d}{\frac{d}{24}} = 2 \cdot 24 = 48$ kílómetrar á klukkustund.

Dæmi 24. Svar: 130° .

LAUSN: Við drögum strik PR . Þar sem $QP = QR$ og $\angle Q = 60^\circ$ er þríhyrningurinn PQR jafnarma og öll horn hans eru 60° þannig að hann er jafnhliða. Því er $PR = PQ = QR = RS$ og $\angle PQR = 60^\circ$. Nú er $\angle SRQ = 100^\circ$ og þá er $\angle SRP = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$. Þar sem $PR = RS$ er þríhyrningurinn PRS jafnarma þannig að

$$\angle RPS = \angle PSR = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ. \text{ Þá fæst að}$$

$$\angle QPS = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ.$$



Önnur lausn:

Dæmi 24. Svar: 130° .

LAUSN: Við drögum strik PR . Þá er $\square PQR$ jafnarma svo að rita má

$$y = \angle QPR = \angle QRP. \text{ Þá er } 2y = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ svo } y = 60^\circ. \text{ Þá}$$

eru öll hornin í $\square PQR$ 60° svo hann er hafnhliða. Því er

$PR = QR = RS$ svo $\square PRS$ er jafnarma. Við höfum síðan að

$$z = \angle PRS = 100^\circ - y = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ. \text{ Þar sem } \square PRS \text{ er jafnarma}$$

má rita $w = \angle RPS = \angle RSP$. Þá er $2w = 180^\circ - z = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

svo $w = 70^\circ$. En nú er $x = y + w = 60^\circ + 70^\circ = 130^\circ$ þ.e.

$$\angle SPQ = x = 130^\circ.$$

