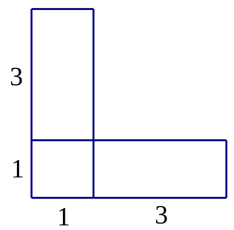
Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík fyrir grunnskólanema, haldin 8. mars 2016
9. bekkur
Lausnir

Dæmi 1. Svar: 9/80.
LAUSN: Talan mitt á milli 1/8 og 1/10 er meðaltal þeirra eða
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{80}+\frac{8}{80}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{80}=\frac{9}{80}$.

Dæmi 2. Svar: 16.
LAUSN: Birna er helmingi yngri en Anna frænka og er því 21 árs gömul. Katrín er 5 árum yngri en Birna svo hún er $21-5=16$ ára.

Dæmi 3. Svar: -2.
LAUSN: Talan 0 á sér ekki margföldunarandhverfu. Margföldunarandhverfa 1 er 1 og margföldunarandhverfa -1 er -1. Talan -2 hefur margföldunarandhverfu $\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ og -2 er minni en $-\frac{1}{2}$.

Dæmi 4. Svar: 7.
LAUSN: Skyggða svæðið er samsett úr tveimur rétthyrningum með flatarmál $3\times1=3$ og einum með flatarmál $1\times1=1$ svo heildarflatarmál svæðisins er $2\cdot3+1=7$.

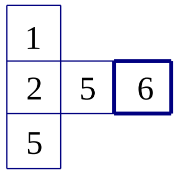


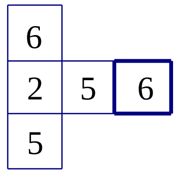
Dæmi 5. Svar: 126.
LAUSN: Nú er Sara 140 cm há. Hún er því $1,25=\frac{5}{4}$ sinnum hærri en hún var þegar þær voru jafnhár. Þær voru því $\frac{140}{5/4}=140\cdot\frac{4}{5}=112$ cm þegar þær voru jafnháar. Sara hefur því stækkað um $140-112=28$ cm en þá hefur Anna stækkað um $\frac{28}{2}=14$ cm og er því $112+14=126$ cm há.

Dæmi 6. Svar: -280.
LAUSN: Til þess að fá neikvæða tölu þegar þrjár tölur eru margfaldaðar saman þarf ein þeirra að vera neikvæð eða þrjár þeirra að vera neikvæðar. Þá koma tveir kostir til greina, þ.e. $(-8)\cdot(-6)\cdot(-4)=-192$ og $(-8)\cdot5\cdot7=-280$ og -280 er minni.

Dæmi 7. Svar: 6.

LAUSN: Þriggja stafa tölur, sem eru veldi af 5, eru $5^3 = 125$ og $5^4 = 625$ þannig að tölustafurinn 2 er í reit merktum 2. Eina þriggja stafa talan, sem er veldi af 2 og byrjar á 2, er $2^8 = 256$ þannig að 6 er í reitnum með sveru strikin.





Dæmi 8. Svar: 17.

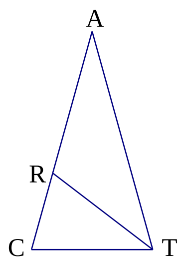
LAUSN: Tólf tölur, sem enda á 1, 2 eða 5, hafa þennan eiginleika. Þær eru 11, 12, 15, 21, 22, 25, 31, 32, 35, 41, 42 og 45. Síðan bætast við tölurnar 24, 33, 44, 36 og 48. Alls eru þetta 17 tölur. Munið að 20, 30, 40 og 50 eru ekki deilanlegar með 0 því deiling með 0 er ekki skilgreind.

Dæmi 9. Svar: 353.

LAUSN: Ef kubbarnir þyrftu ekki að skarast væri fjöldi kubba $\frac{1}{2}(100 \cdot 7) = 350$ talsins. Til þess að þeir skarist þurfum við að skipta út í annarri hverri röð einum af lengri kubbunum með tveimur styttri og setja þá sinn á hvorn enda raðanna. Til þess að fjöldi kubbanna sé sem minnstur setjum við þessa kubba í 2., 4. og 6. röð. Þannig fjölgar kubbunum um 3 og eru alls $350 + 3 = 353$.

Dæmi 10. Svar: 72°.

LAUSN: Þar sem $\angle ACT = \angle ATC$ og $\angle CAT = 36^\circ$ fæst að $2 \cdot \angle ATC = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ þannig að $\angle ATC = 72^\circ$. Þar sem strikið TR helmingar hornið $\angle ATC$ fæst $\angle CTR = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Þá gefur hornasumma þríhyrningsins CRT að $\angle CRT = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.



Dæmi 11. Svar: 5.

LAUSN: Nú er talan $\frac{5}{3}$ stærri en 1 og minni en 2 og talan 2π er stærri en 6 en minni en 7. Heilu tölurnar á milli þeirra eru því 2, 3, 4, 5, 6 sem eru 5 heiltölur.

Dæmi 12. Svar: 400.

LAUSN: Ummál garðsins er $1000 : 10 = 100$ metrar. Lengd garðsins er $1000 : 25 = 40$ metrar. Tvöföld lengdin er þá 80 metrar og þar sem ummálið er 100 metrar er tvöföld breiddin 20 metrar. Þá er garðurinn er 10 metrar á breidd. Flatarmál hans er þá $40 \cdot 10 = 400$ fermetrar.

Dæmi 13. Svar: 15.

LAUSN: Ummálið er

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA = 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 15.$$

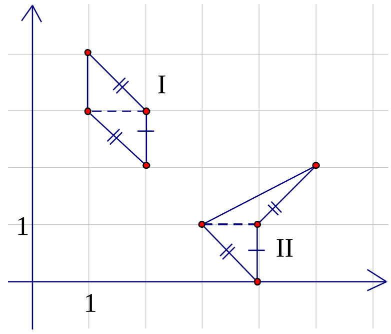
Dæmi 14. Svar: $-\frac{2}{3}$.

LAUSN: Við reiknum út og fáum $(1\otimes 2)\otimes 3=\frac{1^2}{2}\otimes 3=\frac{1}{2}\otimes 3=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{12}$ og

$1\otimes(2\otimes 3)=1\otimes\left(\frac{2^2}{3}\right)=1\otimes\frac{4}{3}=\frac{1^2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$.

Þá fæst að lokum $((1\otimes 2)\otimes 3)-(1\otimes(2\otimes 3))=\frac{1}{12}-\frac{3}{4}=\frac{1}{12}-\frac{9}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$.

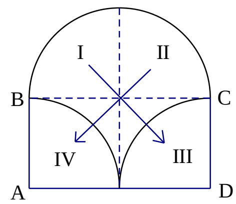
Dæmi 15. Svar: D. Flatarmálið svæðanna er jafnt en ummál I er minna en ummál II.
LAUSN: Við skiptum hverju svæði með brotastriki eins og myndin sýnir. Þríhyrningarnir, sem myndast, hafa grunnlínu 1 að lengd og hæð 1 svo flatarmá þeirra er $\frac{1}{2}$ g því er flatarmál hvors svæðis 1. Hliðarlengdir á svæði I eru jafnlagar tilsvarandi hliðarlengdum á svæði II eins og merkt er inn á myndina. Fjórða hliðin er lengri á svæði II en á svæði I.



Dæmi 16. Svar: 675 þúsund.
LAUSN: Teningur, sem er $2\times 2\times 2$, hefur rúmmálið $2\cdot 2\cdot 2=8$ en teningur, sem er $3\times 3\times 3$ að stærð, hefur rúmmálið $3\cdot 3\cdot 3=27$. Hann kostar því

$200\cdot\frac{27}{8}=25\cdot 27=675$ þúsund.

Dæmi 17. Svar: 50.
LAUSN: Við hugsum okkar að svæði I og II séu færð í svæði IV og III eins og myndin sýnir. Þá sjáum við að flatarmálið er jafnt flatarmáli rétthyrningsins *ABCD*. Hæð hans er 5 og breidd hans 10 svo flatarmálið er 50.



Dæmi 18. Svar: $x=-2$.
LAUSN: Höfum

$$\frac{1}{2}x-4=\frac{1}{5}(10x-5)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-4=\frac{10x}{5}-\frac{5}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-4=2x-1\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-2x=-1+4\Leftrightarrow-\frac{3}{2}x=3$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{3}\cdot 2\Leftrightarrow x=-2 \text{ svo } x=-2.$$

Dæmi 19. Svar: $\frac{5}{12}$.

Lausn: Hér fæst $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{16+9}{144}}=\sqrt{\frac{25}{144}}=\frac{5}{12}$.

Dæmi 20. Svar: 6.

LAUSN: Meðaltal talnanna 7 er $6\frac{4}{7}=\frac{46}{7}$ svo summa talnanna 7 er $7\cdot\frac{46}{7}=46$.

Summa fyrstu fjögurra talnanna er $4\cdot 5=20$ og summa síðustu fjögurra talnanna er $4\cdot 8=32$. Fjórða talan kemur fyrri í báðum þessum summum og er því $20+32-46=6$.

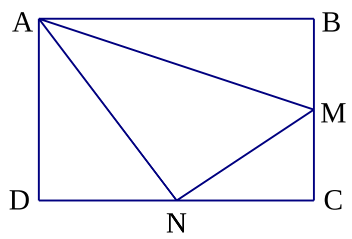
Dæmi 21. Svar: $\frac{3}{8}$.

LAUSN: Við teljum upp hugsanlegar útkomur og skoðum hve oft jafnmargir þorskar koma upp hjá báðum. Þ táknar þorskinn en B bergrisann á krónupeningi.

Karl	Elín	sami fjöldi þorska?
Þ	ÞÞ	nei
Þ	ÞB	já
Þ	BÞ	já
Þ	BB	nei
B	ÞÞ	nei
B	ÞB	nei
B	BÞ	nei
B	BB	já

Við sjáum að það er sami fjöldi af þorskum þrisvar sinnum af 8 skiptum svo líkurnar eru $\frac{3}{8}$.

Dæmi 22. Svar: 27.



LAUSN: Látum *M* vera miðpunkt *BC* og *N* vera miðpunkt *CD*. Skoðum þríhyrningana þrjá sem eru utan við þríhyrninginn *AMN*. Þeir eru rétthyrndir. Flatarmál þeirra er: $F_{\triangle ABM}$ er $\frac{1}{4}$ af flatarmáli rétthyrningsins þ.e. $F_{\triangle ABM} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$, $F_{\triangle ADN}$ er $\frac{1}{4}$ af flatarmáli rétthyrningsins þ.e. $F_{\triangle ADN} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$ og $F_{\triangle MCN}$ er $\frac{1}{8}$ af flatarmáli rétthyrningsins þ.e. $F_{\triangle MCN} = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9$.

Þá er $F_{\triangle AMN} = 72 - 18 - 18 - 9 = 27$.

Dæmi 23: Svar: 56.

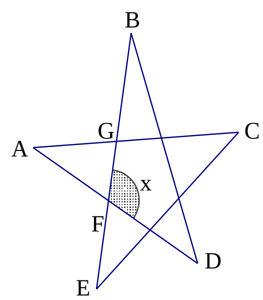
LAUSN: Látum *a* tákna aldur Vals í lok árs 2010 og aldur ömmu hans er þá 2*a* í lok ársins 2010. Fæðingarár þeirra eru þá $2010 - a$ og $2010 - 2a$. Summa fæðingarára þeirra er 3870 sem gefur $2010 - a + 2010 - 2a = 3870$. Við leysum jöfnuna og fáum

$$2010 - a + 2010 - 2a = 3870 \Leftrightarrow -3a = 3870 - 2010 - 2010 \Leftrightarrow -3a = -150 \Leftrightarrow a = \frac{-150}{-3} \text{ svo}$$

$a = 50$. Valur var þá 50 ára árið 2010. Hann er því 56 ára í lok árs 2016.

Dæmi 24. Svar: 80°.

LAUSN: Þar sem $\angle AFG = \angle AGF$ og $\angle GAF + \angle AFG + \angle AGF = 180^\circ$ fæst að $20^\circ + 2 \cdot \angle AFG = 180^\circ$ og



$$20^\circ + 2 \cdot \angle AFG = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \angle AFG = 180^\circ - 20^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \angle AFG = 160^\circ \Leftrightarrow \angle AFG = 80^\circ.$$

Látum svo $x = \angle BFD$. Þá er $x = 180^\circ - \angle AFG = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Hornasumma $\triangle BFD$ er 180° svo

$x + \angle B + \angle D = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B + \angle D = 180^\circ - x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.