Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík fyrir grunnskólanema, haldin 8. mars 2016 8. bekkur

Lausnir

Dæmi 1. Svar: 9/80.
LAUSN: Talan mitt á milli 1/8 og 1/10 er meðaltal þeirra sem er
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{80}+\frac{8}{80}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{80}=\frac{9}{80}$.

Dæmi 2. Svar: $\frac{1}{3}$.
LAUSN: Talan $\frac{1}{3}=0,333...$ er stærri en tölurnar 0,33 og 0,3 og $\frac{2}{9}=0,222...$.

Dæmi 3. Svar: 4.
LAUSN: Hér fæst $\left(2-\frac{2}{5}\right)\cdot 3-\frac{4}{5}=\left(\frac{10-2}{5}\right)\cdot 3-\frac{4}{5}=\frac{8}{5}\cdot 3-\frac{4}{5}=\frac{24}{5}-\frac{4}{5}=\frac{20}{5}=4$.

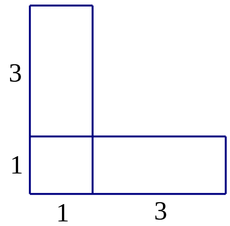
Dæmi 4. Svar: 16.
LAUSN: Birna er helmingi yngri en Anna frænka og er því 21 árs gömul. Katrín er 5 árum yngri en Birna svo hún er $21-5=16$ ára.

Dæmi 5. Svar: -2.
LAUSN: Talan 0 á sér ekki margföldunarandhverfu. Margföldunarandhverfa 1 er 1 og margföldunarandhverfa -1 er -1. Talan -2 hefur margföldunarandhverfu $\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ og -2 er minni en $-\frac{1}{2}$.

Dæmi 6. Svar: 5.
LAUSN: Nú er talan $\frac{5}{3}$ stærri en 1 og minni en 2 og talan 2π er stærri en 6 en minni en 7. Heilu tölurnar á milli þeirra eru því 2, 3, 4, 5, 6 sem eru 5 heiltölur.

Dæmi 7. Svar: 4.
LAUSN: Einn skólameistari getur lokið sínu þriðja ári fyrsta árið af þessum 8. Næsti starfar í 3 ár og líka sá sem er á eftir honum og svo starfar sá fjórði síðasta árið af þessum 8 árum.

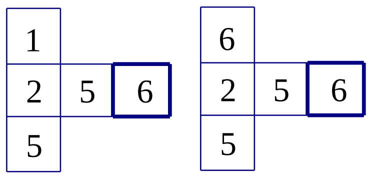
Dæmi 8. Svar: 7.
LAUSN: Skyggða svæðið er samsett úr tveimur rétthyrningum með flatarmál $3 \times 1 = 3$ og einum með flatarmál $1 \times 1 = 1$ svo heildarflatarmál svæðisins er $2 \cdot 3 + 1 = 7$.



Dæmi 9. Svar: -280.
LAUSN: Til þess að fá neikvæða tölu þegar þrjár tölur eru margfaldaðar saman þarf ein þeirra að vera neikvæð eða þrjár þeirra að vera neikvæðar. Þá koma tveir kostir til greina, þ.e. $(-8)\cdot(-6)\cdot(-4) = -192$ og $(-8)\cdot 5 \cdot 7 = -280$ og -280 er minni.

Dæmi 10. Svar: 41.
LAUSN: Heildarfjöldi punkta á teningi er $1+2+3+4+5+6 = 21$ þannig að heildarfjöldi punkta á þremur teningum er 63. Fjöldi punkta sem er sýnilegur er $1+1+2+3+4+5+6 = 22$ svo fjöldi þeirra sem sjást ekki er $63 - 22 = 41$.

Dæmi 11. Svar: 6.
LAUSN: Þriggja stafa tölur, sem eru veldi af 5, eru $5^3 = 125$ og $5^4 = 625$ þannig að tölustafurinn 2 er í reit merktum 2. Eina þriggja stafa talan, sem er veldi af 2 og byrjar á 2, er $2^8 = 256$ þannig að 6 er í reitnum með sveru strikin.

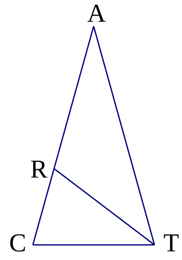


Dæmi 12. Svar: 126.
LAUSN: Nú er Sara 140 cm há. Hún er því $1{,}25 = \frac{5}{4}$ sinnum hærri en hún var þegar þær voru jafnhár. Þær voru því $\frac{140}{5/4} = 140 \cdot \frac{4}{5} = 112$ cm þegar þær voru jafnháar. Sara hefur því stækkað um $140 - 112 = 28$ cm en þá hefur Anna stækkað um $\frac{28}{2} = 14$ cm og er því $112 + 14 = 126$ cm há.

Dæmi 13. Svar: 17.
LAUSN: Tólf tölur, sem enda á 1, 2 eða 5, hafa þennan eiginleika. Þær eru 11, 12, 15, 21, 22, 25, 31, 32, 35, 41, 42 og 45. Síðan bætast við tölurnar 24, 33, 44, 36 og 48. Alls eru þetta 17 tölur. Munið að 20, 30, 40 og 50 eru ekki deilanlegar með 0 því deiling með 0 er ekki skilgreind.

Dæmi 14. Svar: 353.
LAUSN: Ef kubbarnir þyrftu ekki að skarast væri fjöldi kubba $\frac{1}{2}(100 \cdot 7) = 350$ talsins.
Til þess að þeir skarist þurfum við að skipta út í annarri hverri röð einum af lengri kubbunum með tveimur styttri og setja þá sinn á hvorn enda raðanna. Til þess að fjöldi kubbanna sé sem minnstur setjum við þessa kubba í 2., 4. og 6. röð. Þannig fjölgar kubbunum um 3 og eru alls $350 + 3 = 353$.

Dæmi 15. Svar: 72°.



LAUSN: Þar sem $\angle ACT = \angle ATC$ og $\angle CAT = 36^\circ$ fæst að $2\cdot\angle ATC = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ þannig að $\angle ATC = 72^\circ$. Þar sem strikið TR helmingar hornið $\angle ATC$ fæst $\angle CTR = \frac{1}{2}\cdot 72^\circ = 36^\circ$. Þá gefur hornasumma þríhyrningsins CRT að $\angle CRT = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.

Dæmi 16. Svar: 0.
LAUSN: Fáum: $(-1)^{25} + (1)^{25} = -1+1=0$.

Dæmi 17. Svar: 15.
LAUSN: Ummálið er
$AB+BC+CD+DE+EF+FG+GA = 4+4+2+2+1+1+1=15$.

Dæmi 18. Svar: 400.
LAUSN: Ummál garðsins er $1000:10=100$ metrar. Lengd garðsins er $1000:25=40$ metrar. Tvöföld lengdin er þá 80 metrar og þar sem ummálið er 100 metrar er tvöföld breiddin 20 metrar. Þá er garðurinn er 10 metrar á breidd. Flatarmál hans er þá $40\cdot 10 = 400$ fermetrar.

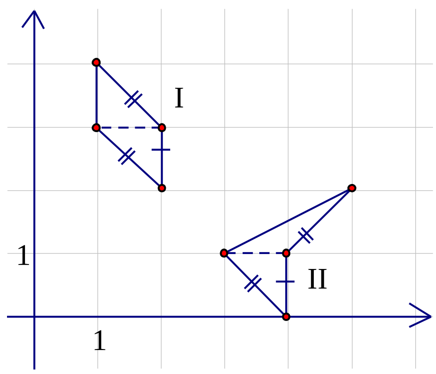
Dæmi 19. Svar: $-\frac{2}{3}$.
LAUSN: Við reiknum út og fáum

$$(1\otimes 2)\otimes 3 = \frac{1^2}{2}\otimes 3 = \frac{1}{2}\otimes 3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12} \text{ og}$$

$$1\otimes(2\otimes 3) = 1\otimes\left(\frac{2^2}{3}\right) = 1\otimes\frac{4}{3} = \frac{1^2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Þá fæst að lokum $\left((1\otimes 2)\otimes 3\right) - \left(1\otimes(2\otimes 3)\right) = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$.

Dæmi 20. Svar: D. Flatarmál svæðanna er jafnt en ummál I er minna en ummál II.

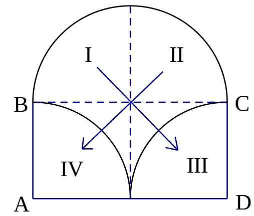


LAUSN: Við skiptum hverju svæði með brotastriki eins og myndin sýnir. Þríhyrningarnir, sem myndast, hafa grunnlínu 1 að lengd og hæð 1 svo flatarmá þeirra er $\frac{1}{2}$ og því er flatarmál hvors svæðis 1. Hliðarlengdir á svæði I eru jafnlagar tilsvarandi hliðarlengdum á svæði II eins og merkt er inn á myndina. Fjórða hliðin er lengri á svæði II en á svæði I.

Dæmi 21. Svar: 675 þúsund.
LAUSN: Teningur, sem er $2\times2\times2$, hefur rúmmálið $2\cdot2\cdot2=8$ en teningur, sem er $3\times3\times3$ að stærð, hefur rúmmálið $3\cdot3\cdot3=27$. Hann kostar því $200\cdot\frac{27}{8} = 25\cdot 27 = 675$ þúsund.

Dæmi 22. Svar: 50.

LAUSN: Við hugsum okkar að svæði I og II séu færð í svæði IV og III eins og myndin sýnir. Þá sjáum við að flatarmálið er jafnt flatarmáli rétthyrningsins *ABCD*. Hæð hans er 5 og breidd hans 10 svo flatarmálið er 50.



Dæmi 23. Svar: $x=-2$.

LAUSN: Höfum

$$5x+5=2(3-x)-15 \Leftrightarrow 5x+5=6-2x-15 \Leftrightarrow 5x+2x=6-15-5 \Leftrightarrow 7x=-14 \Leftrightarrow x=\frac{-14}{7}$$

svo $x=-2$.

Dæmi 24. Svar: $\frac{3}{8}$.

LAUSN: Við teljum upp hugsanlegar útkomur og skoðum hve oft jafnmargir þorskar koma upp hjá báðum. Þ táknar þorskinn en B bergrisann á krónupeningi.

Karl	Elín	sami fjöldi þorska?
Þ	ÞÞ	nei
Þ	ÞB	já
Þ	BÞ	já
Þ	BB	nei
B	ÞÞ	nei
B	ÞB	nei
B	BÞ	nei
B	BB	já

Við sjáum að það er sami fjöldi af þorskum þrisvar sinnum af 8 skiptum svo líkurnar eru $\frac{3}{8}$.

Dæmi 25. Svar: 6.

LAUSN: Meðaltal talnanna 7 er $6\frac{4}{7}=\frac{46}{7}$ svo summa talnanna 7 er $7\cdot\frac{46}{7}=46$. Summa fyrstu fjögurra talnanna er $4\cdot 5=20$ og summa síðustu fjögurra talnanna er $4\cdot 8=32$. Fjórða talan kemur fyrri í báðum þessum summum og er því $20+32-46=6$.

Dæmi 26: Svar: 56.

LAUSN: Látum a tákna aldur Vals í lok árs 2010 og aldur ömmu hans er þá $2a$ í lok ársins 2010. Fæðingarár þeirra eru þá $2010-a$ og $2010-2a$. Summa fæðingarára þeirra er 3870 sem gefur $2010-a+2010-2a=3870$. Við leysum jöfnuna og fáum

$$2010-a+2010-2a=3870 \Leftrightarrow -3a=3870-2010-2010 \Leftrightarrow -3a=-150 \Leftrightarrow a=\frac{-150}{-3} \text{ svo } a=50.$$

Valur var þá 50 ára árið 2010. Hann er því 56 ára í lok árs 2016.