Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík fyrir grunnskólanema, haldin 5. mars 2019 8. bekkur

Lausnir

Dæmi 1. Svar: 12.
LAUSN: Hér fæst $\frac{16+8}{4-2}=\frac{24}{2}=12$.

Dæmi 2. Svar: 673.
LAUSN: Við reiknum út og fáum $(675-2)\cdot 2-2019:3=673\cdot 2-673=673$.

Dæmi 3. Svar: $222.222.222.223$.
LAUSN: Venjulegur lóðréttur frádráttur gefur

$$\begin{array}{r} 1.000.000.000.000 \\ \underline{-777.777.777.777} \\ 222.222.222.223 \end{array}$$

Dæmi 4. Svar: 25.
LAUSN: Hér fæst

$$991+993+995+997+999=5000-N$$
$$=(1000-9)+(1000-7)+(1000-5)+(1000-3)+(1000-1)$$
$$=5000-(9+7+5+3+1)=5000-25$$

svo $N=25$.

Dæmi 5. Svar: B.
LAUSN: Safn dómínókubba sem skarast ekki verður að þekja fjölda reita sem er slétt tala. Reitaborð B er með oddatölufjölda reita, 15 alls, svo það er ekki hægt það þekja það reitaborð með dómínókubbum. Með smávinnu má þekja hin reitaborðin.

Dæmi 6. Svar: 7.
LAUSN: Við strikum undir stærstu töluna í hverjum dálki.

10	6	4	3	2
11	$\underline{7}$	14	10	8
8	3	4	5	$\underline{9}$
$\underline{13}$	4	$\underline{15}$	$\underline{12}$	1
8	2	5	9	3

Nú sést að 7 er minnst í annarri röðinni.

Dæmi 7. Svar: 10.000.000.000.
LAUSN: Við námundum hverja tölu í teljara niður á við og hverja tölu nefnara upp á við og sjáum að talan er stærri en

$$\frac{500.000\cdot 11.000.000+9.000.000\cdot 500.000}{20.000\cdot 0,05}=\frac{500.000\cdot 20.000.000}{1.000}$$

$=500\cdot 20.000.000=10.000.000.000.$
Því er talan næst 10.000.000.000 því hún er minni.

Dæmi 8. Svar: 12.
LAUSN: Jákvætt hlutfall er stærra en neikvætt hlutfall. Til þess að fá jákvætt hlutfall þurfa báðar tölur að vera jákvæðar eða báðar neikvæðar. Ef við veljum tvær jákvæðar tölur er stærsta hlutfallið $\frac{8}{1}=8$ en ef við veljum tvær neikvæðar tölur er stærsta hlutfallið $\frac{-24}{-2}=12$ sem er þá svarið.

Dæmi 9. Svar: 21.
LAUSN: Það eru 15 tölur deilanlegar með 3 á milli 1 og 46, $(45=3\cdot 15)$ og 9 deilanlegar með 5 $(45=9\cdot 5)$. En þá eru 3 tölur tvítaldar, þ.e. 15, 30 og 45, því þær eru deilanlegar með bæði 3 og 5 svo heildarfjöldinn er $15+9-3=21$.

Dæmi 10. Svar: 8.
LAUSN: Grunnlína samsíðungsins liggur á *x*-ásnum, BC er samsíða honum, og hnit punktsins C eru $(4,2)$ þannig að hnit B eru $(0,2)$. Þá er hæð samsíðungsins 2 en lengd striksins BC er 4. Þá fæst að flatarmálið er $4\cdot 2=8$.

Dæmi 11. Svar: 4.
LAUSN: Nú er talan 5 í menginu svo summa hinna talnanna tveggja þarf að vera 10 svo heildarsumma sé 15. Summuna 10 má fá á 4 vegu sem eru $9+1,\ 8+2,\ 7+3,\ 6+4$ þannig að það eru fjögur þriggja staka mengi sem má velja svo summa stakanna sé 15 og talan 5 sé í menginu.

Dæmi 12. Svar: 2019.
LAUSN: Nú gildir um öll *k* að $(k-1)+k+(k+1)=3k$. Því fæst

$$\frac{2+3+4}{3}=\frac{2018+2019+2020}{N}\Leftrightarrow 3=\frac{3\cdot 2019}{N}\Leftrightarrow N=2019.$$

Dæmi 13. Svar: 9.
LAUSN: Við frumþáttum töluna og umritum sem

$$25\cdot 25\cdot 25\cdot 25\cdot 25\cdot 25\cdot 25\cdot 8\cdot 8\cdot 8=\left(5^2\right)^7\cdot\left(2^3\right)^3=5^{14}\cdot 2^9=5^5\cdot 5^9\cdot 2^9=5^5\cdot(5\cdot 2)^9=5^5\cdot 10^9$$

og sjá að talan endar því á 9 núllum.

Dæmi 14. Svar: Óbreytt.
LAUSN: Þegar teningurinn er skorinn af kubbnum eru 3 fersentímetrar fjarlægðir af yfirborði hans en svo bætast við 3 fersentímetrar í skurðflötunum þannig að yfirborð kubbsins er óbreytt.

Dæmi 15. Svar: 13.
LAUSN: Ef einn nemandi fær $5+5+5=15$ stig getur enginn annar nemandi fengið fleiri en $3+3+3=9$ stig. Ef einn nemandi fær $5+5+3=13$ stig getur enginn annar nemandi fengið fleiri en $3+3+5=11$ stig. En ef nemandi fær $5+5+1=11$ stig eða $5+3+3=11$ stig getur einhver annar nemandi fengið $3+3+5=11$ eða $3+5+5=13$ stig. Því nægja 13 stig til þess að vera öruggur um að enginn annar nemandi fái fleiri stig en nokkur annar keppandi, en færri stig nægja ekki.

Dæmi 16. Svar: 0.
LAUSN: Talan 1 er ekki frumtala og hinar tölurnar eru deilanlegar með 2, 3 eða 5. Sléttu tölurnar 12, 1234 og 123456 eru deilanlegar með 2, 123 er deilanleg með 3 og talan 12345 er deilanleg með 5.

Dæmi 17. Svar: 200.
LAUSN: Nú eru 10 sæti í fyrstu röðinni og þar geta 5 nemendur setið í prófi. Í næstu röð eru 11 sæti og þar geta 6 tekið próf. Í þriðju röð eru 12 sæti og 6 geta tekið próf. Við höldum þannig áfram og sjáum að í tuttugustu röðinni eru 29 sæti og þar geta 15 tekið próf. Fjöldi nemenda er þá $5+6+6+7+7+8+8+9+9+10+10+11+11+12+12+13+13+14+14+15$. Hér má umraða og fá

$$\begin{array}{r} 5+\ 6+\ 6+\ 7+\ 7+8+\ 8+9+\ 9+10 \\ \underline{+15+14+14+13+13+12+12+11+11+10} \\ =20+20+20+20+20+20+20+20+20+20 \end{array}$$

Svo heildarfjöldinn er $20\cdot 10=200$.

Dæmi 18. Svar: 30%.
LAUSN: Við teljum X-in og sjáum að fjöldi starfsmanna með 5 ára starfsaldur eða hærri er 9X og að heildarfjöldi starfsmanna er 30X. Hlutfallið er þá $\frac{9}{30}\cdot 100=30\%$.

Dæmi 19. Svar: 55.
LAUSN: Þar sem meðaltalið er 10 fæst að summa talnanna tíu er $10\cdot 10=100$. Við veljum 9 lægstu ólíku jákvæðu heiltölurnar sem eru 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 til þess að síðasta talan verði sem stærst. Hún er þá $100-(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=100-45=55$.

Dæmi 20. Svar: 1.
LAUSN: Nú er summan samtals 300 svo A verður að vera 2 þar sem A er í hundraðasæti efst í summunni. Ef A er 1 getur summan ekki orðið 300 og summan verður of há ef A er 3 eða hærri tölustafur. Ef A er 2 getur summan $A+B+C$ í einingarsætinu ekki verið 20 (B og C eru ólík og því ekki bæði 9) svo $A+B+C=10$ og þá er 1 geymdur svo í tugasætinu fæst $1+A+B=10$ þannig að $B=7$ og þar með er $\mathrm{C}=1$.

Dæmi 21. Svar: $\frac{7}{9}$ eða 77,8%.
LAUSN: Tölurnar sem við fáum þegar við margföldum saman eru

$\underline{1\cdot 4=4}$, $\underline{2\cdot 4=8}$, $\underline{3\cdot 4=12}$ $1\cdot 5=5$, $\underline{2\cdot 5=10}$, $3\cdot 5=15$ og
$\underline{1\cdot 6=6}$, $\underline{2\cdot 6=12}$, $\underline{3\cdot 6=18}$.

Við höfum strikað undir margfeldin sem gefa slétta tölu og sjáum að það eru 7 tölur af 9 sem eru sléttar svo líkurnar eru $\frac{7}{9}$. Í prósentum er það $77{,}8\%$.

Dæmi 22. Svar: 10.
LAUSN: Við setjum tölurnar í töflu:

	Lúðrasveit	Sinfóníu-hljómsveit	Í báðum
Drengir	80	100	*x*
Stúlkur	100	80	60
Alls	180	180	60+*x*

Nú fæst út frá heildarfjölda nemenda jafnan $180+180-(60+x)=230$ sem við leysum og fáum $x=70$. Þá eru 70 drengir í báðum hljómsveitum.

Dæmi 23. Svar: $x=3$.
LAUSN: Höfum
$-8x-18=6(2-3x) \Leftrightarrow -8x-18=12-18x \Leftrightarrow -8x+18x=12+18$
$\Leftrightarrow 10x=30 \Leftrightarrow x=\frac{30}{10} \Leftrightarrow x=3.$

Dæmi 24. Svar: $\frac{243}{1024}$.
LAUSN: Þar sem $\frac{1}{4}$ hluti þríhyrningsins verður hvítur eftir fyrstu aðgerð eru $\frac{3}{4}$ hlutar gráir. Eftir aðra aðgerð verða áfram $\frac{3}{4}$ hlutar af $\frac{3}{4}$ gráir eða $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$ hlutar. Þannig fæst að eftir fimm aðgerðir verður hlutfallið af gráu svæði $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{243}{1024}$.

Dæmi 25. Svar: 8.
LAUSN: Nú stækkar rúmmálið um 4 rúmsentímetra þegar gasið hitnar um 3 gráður. Hér er heildarhitabreytingin $32^\circ-20^\circ=12^\circ=4\cdot 3^\circ$. Samsvarandi breyting á rúmmáli er þá $4\cdot 4=16\ cm^3$. Upphaflegt rúmmál gassins var því $24-16=8\ cm^3$.

Dæmi 26. Svar: 20.
LAUSN: Hér er hliðarlengd litlu teninganna jákvæð heiltala og þá verður hún að vera 1 eða 2. Stærðir litlu teninganna eru því annaðhvort $1\times1\times1$ eða $2\times2\times2$. Þar sem teningarnir eiga ekki allir að vera jafnstórir verður að minnsta kosti einn að vera $2\times2\times2$ og þeir geta augljóslega ekki verið fleiri. Aðrir teningar eru þá af stærðinni $1\times1\times1$. Hliðarlengd upphaflega teningsins er 3 og rúmmál hans er þá $3\times3\times3=27$ og rúmmál teningsins með hliðarlengd 2 er $2\times2\times2=8$. Fjöldi teninga með hliðarlengd 1 er þá $27-8=19$ þannig að heildarfjöldi teninga sem þannig fæst er $19+1=20$.