# Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík fyrir grunnskólanema, haldin 5. mars 2019 10. bekkur

## Lausnir

**Dæmi 1.** Svar: 222.222.222.223.
LAUSN: Venjulegur lóðréttur frádráttur gefur

$$\begin{array}{r} 1.000.000.000.000 \\ \underline{-777.777.777.777} \\ 222.222.222.223 \end{array}$$

**Dæmi 2.** Svar: 25.
LAUSN: Hér fæst

$$991+993+995+997+999=5000-N$$
$$=(1000-9)+(1000-7)+(1000-5)+(1000-3)+(1000-1)$$
$$=5000-(9+7+5+3+1)=5000-25$$

svo $N=25$.

**Dæmi 3.** Svar: B.
LAUSN: Safn dómínókubba sem skarast ekki verður að þekja fjölda reita, sem er slétt tala. Reitaborð B er með oddatölufjölda reita, 15 alls, svo það er ekki hægt það þekja það reitaborð með dómínókubbum. Með smávinnu má þekja hin reitaborðin.

**Dæmi 4.** Svar: 21.
LAUSN: Það eru 15 tölur deilanlegar með 3 á milli 1 og 46, $(45=3\cdot 15)$ og 9 deilanlegar með 5 $(45=9\cdot 5)$. En þá eru 3 tölur tvítaldar, þ.e. 15, 30 og 45, því þær eru deilanlegar með bæði 3 og 5 svo heildarfjöldinn er $15+9-3=21$.

**Dæmi 5.** Svar: 8.
LAUSN: Grunnlína samsíðungsins liggur á $x$-ásnum, BC er samsíða honum, og hnit punktsins C eru $(4,2)$ þannig að hnit B eru $(0,2)$. Þá er hæð samsíðungsins 2 en lengd striksins BC er 4. Þá fæst að flatarmálið er $4\cdot 2=8$.

**Dæmi 6.** Svar: 4.
LAUSN: Nú er talan 5 í menginu svo summa hinna talnanna tveggja þarf að vera 10 svo heildarsumma sé 15. Summuna 10 má fá á 4 vegu sem eru $9+1$, $8+2$, $7+3$, $6+4$ þannig að það eru fjögur þriggja staka mengi sem má velja svo summa stakanna sé 15 og talan 5 sé í menginu.

**Dæmi 7.** Svar: 2019.
LAUSN: Nú gildir um öll $k$ að $(k-1)+k+(k+1)=3k$. Því fæst

$$\frac{2+3+4}{3}=\frac{2018+2019+2020}{N} \Leftrightarrow 3=\frac{3\cdot 2019}{N} \Leftrightarrow N=2019.$$

**Dæmi 8.** Svar: 30%.
LAUSN: Við teljum X-in og sjáum að fjöldi starfsmanna með 5 ára starfsaldur eða hærri er 9X og að heildarfjöldi starfsmanna er 30X. Hlutfallið er þá $\frac{9}{30}\cdot 100=30\%$.

**Dæmi 9.** Svar: 55.
LAUSN: Þar sem meðaltalið er 10 fæst að summa talnanna tíu er $10\cdot 10=100$. Við veljum 9 lægstu ólíku jákvæðu heiltölurnar sem eru 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 til þess að síðasta talan verði sem stærst. Hún er þá $100-(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=100-45=55$.

**Dæmi 10.** Svar: 1.
LAUSN: Nú er summan samtals 300 svo A verður að vera 2 þar sem A er í hundraðasæti efst í summunni. Ef A er 1 getur summan ekki orðið 300 og summan verður of há ef A er 3 eða hærri tölustafur. Ef A er 2 getur summan $A+B+C$ í einingarsætinu ekki verið 20 (B og C eru ólík og því ekki bæði 9) svo $A+B+C=10$ og þá er 1 geymdur svo í tugasætinu fæst $1+A+B=10$ þannig að $B=7$ og þar með er $\mathrm{C}=1$.

**Dæmi 11.** Svar: $\frac{7}{9}$ eða 77,8%.
LAUSN: Tölurnar sem við fáum þegar við margföldum saman eru

$\underline{1\cdot 4=4}$, $\underline{2\cdot 4=8}$, $\underline{3\cdot 4=12}$ $\quad 1\cdot 5=5$, $\underline{2\cdot 5=10}$, $3\cdot 5=15$ og
$\underline{1\cdot 6=6}$, $\underline{2\cdot 6=12}$, $\underline{3\cdot 6=18}$.

Við höfum strikað undir margfeldin sem gefa slétta tölu og sjáum að það eru 7 tölur af 9 sem eru sléttar svo líkurnar eru $\frac{7}{9}$. Í prósentum er það $77{,}8\%$.

**Dæmi 12.** Svar: 70.
LAUSN: Við setjum tölurnar í töflu:

| | Lúðrasveit | Sinfóníu-hljómsveit | Í báðum |
|---|---|---|---|
| Drengir | 80 | 100 | *x* |
| Stúlkur | 100 | 80 | 60 |
| Alls | 180 | 180 | 60+*x* |

Nú fæst út frá heildarfjölda nemenda jafnan $180+180-(60+x)=230$ sem við leysum og fáum $x=70$. Þá eru 70 drengir í báðum hljómsveitum.

**Dæmi 13.** Svar: $x = -\frac{8}{5}$.

LAUSN: Höfum

$$\frac{2}{3}(2x+5) = 3x+6 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} = 3x+6 \Leftrightarrow 4x+10 = 9x+18$$

$$\Leftrightarrow 4x - 9x = 18 - 10 \Leftrightarrow -5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{-5} \Leftrightarrow x = -\frac{8}{5}.$$

**Dæmi 14.** Svar: $\frac{243}{1024}$.

LAUSN: Þar sem $\frac{1}{4}$ hluti þríhyrningsins verður hvítur eftir fyrstu aðgerð eru $\frac{3}{4}$ hlutar gráir. Eftir aðra aðgerð verða áfram $\frac{3}{4}$ hlutar af $\frac{3}{4}$ gráir eða $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$ hlutar. Þannig fæst að eftir fimm aðgerðir verður hlutfallið af gráu svæði $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$.

**Dæmi 15.** Svar: 8.

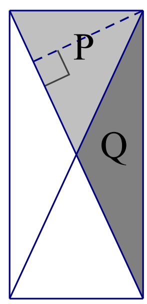
LAUSN: Nú stækkar rúmmálið um 4 rúmsentímetra þegar gasið hitnar um 3 gráður. Hér er heildar hitabreytingin $32^\circ - 20^\circ = 12^\circ = 4\cdot 3^\circ$. Samsvarandi breyting á rúmmáli er þá $4\cdot 4 = 16\ cm^3$. Upphaflegt rúmmál gassins var því $24 - 16 = 8\ \ cm^3$.

**Dæmi 16.** Svar: 7.

LAUSN: Jónas vann 4 spil svo Jóna hefur tapað 4 spilum. Hún fékk því 4 stig fyrir þau. Hún var með 10 stig svo hún hefur fengið $10 - 4 = 6$ stig fyrir unnin spil þannig að hún hefur unnið 3 spil. Þau spiluðu því saman $4 + 3 = 7$ spil.

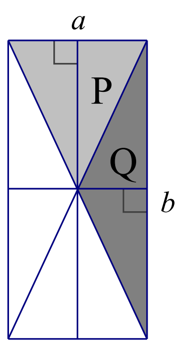
**Dæmi 17.** Svar: 1:1.

LAUSN: Við drögum hæðina í þríhyrningnum P sem er einnig hæð á grunnlínu í þríhyrningnum Q. Sjá mynd. Nú skipta hornalínur í rétthyrningi hvor annarri í tvo jafnstóra hluta svo grunnlínurnar í báðum þríhyrningunum eru jafnlangar. Þar sem bæði hæð og grunnlína eru jafnlangar eru flatarmál þríhyrninganna jafnstór svo hlutfallið á milli þeirra er 1:1.




Önnur lausn.

LAUSN: Við drögum hæðir í þríhyrningunum eins og sýnt er á mynd og látum hliðarlengdir rétthyrningsins vera $a$ og $b$. Þá sést að flatarmál P er $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2} = \frac{1}{4}ab$ en flatarmál Q er $\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{4}ab$. Því er hlutfallið á milli flatarmála þríhyrninganna 1:1.



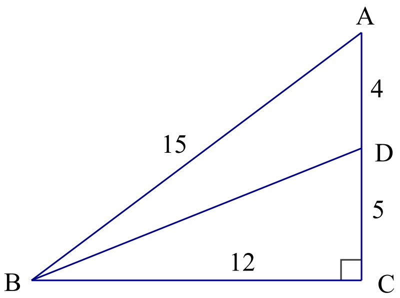
**Dæmi 18.** Svar: 200.
LAUSN: Nú eru 10 sæti í fyrstu röðinni og þar geta 5 nemendur setið í prófi. Í næstu röð eru 11 sæti og þar geta 6 tekið próf. Í þriðju röð eru 12 sæti og 6 geta tekið próf. Við höldum þannig áfram og sjáum að í tuttugustu röðinni eru 29 sæti og þar geta 15 tekið próf. Fjöldi nemenda er þá $5+6+6+7+7+8+8+9+9+10+10+11+11+12+12+13+13+14+14+15$. Hér má umraða og fá

$$\begin{array}{r} 5+\ 6+\ 6+\ 7+\ 7+8+\ 8+9+\ 9+10 \\ \underline{+15+14+14+13+13+12+12+11+11+10} \\ =20+20+20+20+20+20+20+20+20+20 \end{array}$$

Svo heildarfjöldinn er $20\cdot 10=200$ nemendur.

**Dæmi 19.** Svar: 20.
LAUSN: Hér er hliðarlengd litlu teninganna jákvæð heiltala og þá verður hún að vera 1 eða 2. Stærðir litlu teninganna eru því annaðhvort $1\times1\times1$ eða $2\times2\times2$. Þar sem teningarnir eiga ekki allir að vera jafnstórir verður að minnsta kosti einn að vera $2\times2\times2$ og þeir geta augljóslega ekki verið fleiri. Aðrir teningar eru þá af stærðinni $1\times1\times1$. Hliðarlengd upphaflega teningsins er 3 og rúmmál hans er þá $3\times3\times3=27$ og rúmmál teningsins með hliðarlengd 2 er $2\times2\times2=8$. Fjöldi teninga með hliðarlengd 1 er þá $27-8=19$ þannig að heildarfjöldi teninga sem þannig fæst er $19+1=20$.

**Dæmi 20.** Svar: 13.
LAUSN: Við beitum reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn *BAC* og fáum að




$$|AC|=\sqrt{|BA|^2-|BC|^2}=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9.$$

Þá er $|AD|=\frac{4}{9}\cdot|AC|=\frac{4}{9}\cdot 9=4$ svo $|CD|=9-4=5$. Við beitum svo reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn *BDC* og fáum að
$$|BD|=\sqrt{|BC|^2+|CD|^2}=\sqrt{12^2+5^2}\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13.$$

**Dæmi 21.** Svar: $2,5\pi$.
LAUSN: Við þurfum að finna lengd striksins *AB* út frá flatarmáli rétthyrningsins. Hálfhringirnir tveir mynda saman einn hring og flatarmál hans er þá $F_{hringur}=r^2\pi=5^2\cdot\pi=25\pi$. Flatarmál rétthyrningsins er þá $|AB|\cdot|AD|=25\pi+100$. Nú er $|AD|=10$ svo þá fæst $|AB|=\frac{25\pi+100}{10}=2,5\pi+10$. Látum nú *x* tákna stystu fjarlægðina á milli hálfhringjanna tveggja. Fjarlægðin er lengd striksins *AB* að frádregnum geislum hálfhringjanna, þ.e. $x=2,5\pi+10-5-5=2,5\pi$.