

Stærðfræðikeppni Menntaskólans í Reykjavík fyrir grunnskólanema, haldin 13. mars 2018 10. bekkur

Lausnir

Dæmi 1. Svar: 51.

LAUSN: Hér fáum við að fjöldi af bláum, rauðum og grænum kúlum er

$$\frac{612}{2} + \frac{612}{4} + \frac{612}{6} = 306 + 153 + 102 = 561. \text{ Kúlur með öðrum lit eru þá } 612 - 561 = 51.$$

Dæmi 2. Svar: 4.

LAUSN: Hver af svigunum í $(1-2)-(3-4)-(5-6)-(7-8)-(9-10)-(11-12)$ er -1 svo hér fæst $(1-2)-(3-4)-(5-6)-(7-8)-(9-10)-(11-12) = -1+1+1+1+1+1 = 4.$

Dæmi 3. Svar: 1.

$$\text{LAUSN: Hér fæst } \frac{\overbrace{10-9}^1 + \overbrace{8-7}^1 + \overbrace{6-5}^1 + \overbrace{4-3}^1 + \overbrace{2-1}^1}{\underbrace{1-2}_{-1} + \underbrace{3-4}_{-1} + \underbrace{5-6}_{-1} + \underbrace{7-8}_{-1} + 9} = \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot (-1) + 9} = \frac{5}{5} = 1.$$

Dæmi 4. Svar: 0.

LAUSN: Talan er 10 tölustafir svo að minnsta kosti einn tölustafanna er núll því annars væri summa tölustafanna hærrí en 9. Margfeldi tölustafanna er því núll.

Dæmi 5. Svar: 80%.

LAUSN: Júlía var með 35 stig og af þeim fékk hún $35 - 2 - 5 = 28$ stig fyrir einfalda slagi. Hlutfalli er þá $\frac{28}{35} \cdot 100 = 80\%.$

Dæmi 6. Svar: 216.

LAUSN: Við fáum $2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 27 = 216.$

Dæmi 7. Svar: 20.

LAUSN: Litlu þríhyrningarnir eru 10. Flatarmál hvers þeirra er $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2.$ Flatarmál þeirra allra er því $2 \cdot 10 = 20.$

Önnur lausn fæst út frá hlutfalli skyggðu þríhyrninganna af heildarfjölda þeirra.

Flatarmál þríhyrningsins er $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32.$ Hlutfallið gefur þá $\frac{10}{16} \cdot 32 = 20.$

Dæmi 8. Svar: 24.000.

LAUSN: Hvert dekk var notað $\frac{4}{5}$ hluta af akstursvegalegdinni. Hvert dekk var því notað í $30000 \cdot \frac{4}{5} = 24.000$ km.

Dæmi 9. Svar: 24.

LAUSN: Þar sem munurinn á milli hálffulls brúsa og brúsa með $\frac{1}{3}$ af vatni er fjórir lítrar sést að 4 lítrar eru $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ af fullum brúsa. Brúsinn tekur því $4 \cdot 6 = 24$ lítra.

Dæmi 10. Svar: B.

LAUSN: Í rununni eru 9 stafir sem eru endurteknir aftur og aftur. Ef við deilum 9 upp í 2018 er afgangurinn 2, þ.e. $\frac{2018}{9} = 224 + \frac{2}{9}$. Stafur númer 2018 er því annar stafurinn í rununni, þ.e. B.

Dæmi 11. Svar: 1.

LAUSN: Í hverju horni blómabeðsins bætist við tvöföld breidd gangstígsins. Hornin eru fjögur svo lengdin, sem bætist við, er 8 sinnum breidd gangstígsins. En það eru 8 metrar svo breidd gangstígsins er 1 metri.

Dæmi 12. Svar: 1.

LAUSN: Fjórðungur úr sólarhring eru $\frac{1}{4} \cdot 24 = 6$ klst. Einn þriðju af því er $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ klst. og helmingur af því er ein klst.

Dæmi 13. Svar: $x = -\frac{12}{23}$.

LAUSN: Höfum

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}(5x-8) &= 2x+9 \Leftrightarrow -\frac{15}{4}x+6=2x+9 \Leftrightarrow -\frac{15}{4}x-2x=9-6 \Leftrightarrow -\frac{23}{4}x=3 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{3 \cdot 4}{23} \Leftrightarrow x = -\frac{12}{23}. \end{aligned}$$

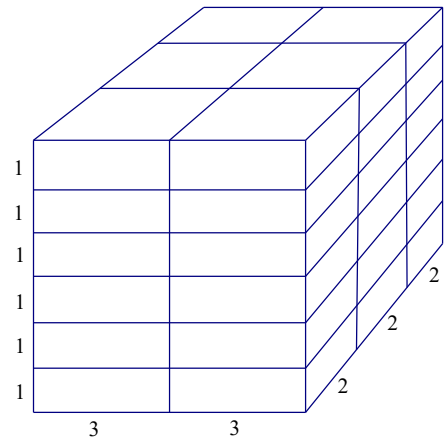
Dæmi 14. Svar: 37.

LAUSN: Eftir fyrstu klippingu hefur Halldóra 10 miða. Í hvers sinn sem hún klippir einn miða í viðbót bætast 9 miðar við. Að lokum hefur hún því $10+9+9+9=37$ miða.

Dæmi 15. Svar: 36.

LAUSN: Rúmmáls hvers kubbs er $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ dm}^3$.

Rúmmál teningsins þarf að vera deilanlegt með 3 og einnig með 6. Hliðarlengdir 1, 2, 3, 4 og 5 koma því ekki til greina. En tening með hliðarlengdir 6 er hægt að búa til úr $6 \cdot 6 = 36$ kubbum (sjá mynd). Við búum til botn með hæð 1 dm úr 6 kubbum og leggjum síðan 5 eins hæðir þar ofan á, alls er þá hæðin 6 dm.



Dæmi 16. Svar: 54° .

LAUSN: Við táknum stærðina á horninu B sem x , þá er $B = x$, $A = 3x$ og $C = 6x$. Þá fæst jafnan $x + 3x + 6x = 180^\circ \Leftrightarrow 10x = 180^\circ$ sem gefur $x = 18^\circ$. Þá er $\angle A = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$.

Dæmi 17. Svar: $\frac{17}{36}$.

LAUSN: Við skrifum upp allar útkomur og teljum. Þá sést að það eru 17 útkomur (feitlettraðar) sem eru stærri en 10. Líkurnar eru því $\frac{17}{36}$.

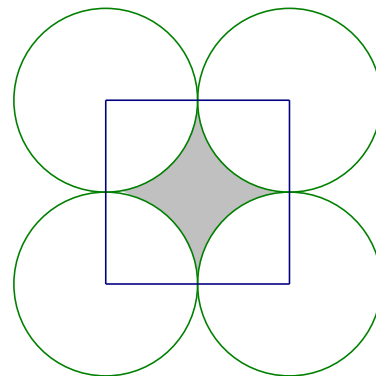
Margfeldi útkoma	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Dæmi 18. Svar: 4.

LAUSN: Um þríhyrninga gildir að summa af lengd styttri hliðanna er lengri en lengsta hliðin. Nú er hornið BAC stærst svo hliðin BC er lengst. Hún er því lengri en 5 cm og styttri en 10 cm, það er hún getur verið 6, 7, 8 eða 9 cm. Alls 4 möguleikar.

Dæmi 19. Svar: $36 - 9\pi$ eða um 7,7.

LAUSN: Inni í ferningnum eru fjórir jafnstórir hringfjórðungar. Flatarmál þeirra er því jafnt flatarmáli eins hrings með geisla 3 en það er $F_{hringur} = 3^2 \cdot \pi = 9\pi$. Hliðarlengd ferningsins er tvöfaldur geisli eins hrings, þ.e. 6 og flatarmál ferningsins er þá 36. Mismunur þessara tveggja stærða er flatarmál skyggða svæðisins sem er $36 - 9\pi$ sem með einum aukastaf er $36 - 9 \cdot 3,14 = 7,7$.



Dæmi 20. Svar: 9 sinnum.

LAUSN: Eftir fyrstu hellingu úr flöskunni er $\frac{1}{2}$ lítri eftir. Næst þegar hellt er verða

eftir í flöskunni $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ lítrar. Eftir að hellt hefur verið þrisvar úr flöskunni er eftir

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ og svo framvegis. Við sjáum að við getum stytnt út brotin og fáum

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ eða $\frac{1}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot 10} = \frac{1}{10}$ þannig að

eftir að hellt hefur verið níu sinnum úr flöskunni er einn tíundi eftir í henni.

Dæmi 21. Svar: Tölurnar sex eru 15, 16, 17, 18, 19 og 29.

LAUSN: Við getum ritað tveggja stafa tölu á forminu ab þar sem a og b eru tölustafir og $a \neq 0$. Þá þarf að gilda $10b + a > 3(10a + b)$. Við einföldum þessa ójöfnu og fáum

$10b + a > 3(10a + b) \Leftrightarrow 10b + a > 30a + 3b \Leftrightarrow 7b > 29a$. Þá getur a verið 1 til 9. Ef

$a = 1$ gengur $b = 5, 6, 7, 8, 9$ og ef $a = 2$ gengur $b = 9$. Ef $a = 3$ eða stærra hefur

ójafnan ekki lausn þar sem $0 \leq b \leq 9$. Tölurnar sex eru þá 15, 16, 17, 18, 19 og 29.